1. Data la famiglia di applicazioni lineari $L(x, y, z, t) = (ax, y - t, 2x + az)$, determinare gli eventuali valori del parametro reale a per i quali la dimensione del nucleo è 2. Per tali valori di a determinare una base del nucleo, e una base dell'immagine.

   La matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche è $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$

   La dimensione del nucleo è 2 se e solo se il rango di A è 2. Il minore $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ è non nullo, quindi $r(A) \geq 2$; $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2$, quindi se $a \neq 0$ il rango di A è 3, mentre se $a = 0$, essendo la prima riga di A il vettore nullo (N.B. ci sarebbe un altro minore di ordine 3 da controllare...), il rango di A è 2.

   Quindi la dimensione del nucleo di L è 2 se e solo se $a = 0$.

   Il nucleo è formato dai vettori di $\mathbb{R}^4$ soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y - t = 0 \\ 2x = 0, \end{cases}$$

   cioè dai vettori del tipo $(0, y, z, y)$. Una base del nucleo è formata dai vettori: $(0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$; una base dell'immagine è formata da 2 vettori colonna di A linearmente indipendenti, ad esempio dai vettori $(0, 0, 2), (0, 1, 0)$.

2. Sia $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$. Determinare il dominio D di f. Stabilire se è possibile estendere per continuità f a tutto $\mathbb{R}^2$.

$D = \{(x,y) : x \neq y\}$. La funzione non si può estendere per continuità in nessun punto della bisettrice, infatti si ha che:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = \frac{2a}{0} = \infty$ se $a \neq 0$;

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste poiché ad esempio $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$, mentre $\displaystyle\lim_{y\to 0} f(0,y) = -1$.

3. Scrivere la serie di Fourier $S(x)$ della funzione $2\pi-$periodica tale che $f(x) = 0$ per $-\pi < x < 0$ e $f(x) = 1$ per $0 < x < \pi$. Calcolare la somma della serie di Fourier di f in $x = 0$, e in $x = \frac{9}{4}\pi$.

   Si ha che: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx = 0$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n} = 0$ se n è pari, $\frac{2}{n\pi}$ se n è dispari. Quindi $S(x) = \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$.

   La serie di Fourier di f converge a $\frac{1}{2}(f(0^+)+f(0^-)) = \frac{1}{2}$ in $x = 0$, converge a $f(x)$ in $x = \frac{9}{4}\pi$, e quindi a 1.

4. Calcolare l'area del dominio D di $\mathbb{R}^2$: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ (x^2+y^2)^3 \leq 4x^2y^2\}$.

L'area di D è $\displaystyle\iint_D dxdy$. Passando alle coordinate polari, si trova che area$(D) = \displaystyle\iint_{\tilde{D}} \rho d\rho d\theta$, dove $\tilde{D} = \{(\rho,\theta) : \cos\theta \geq 0,\ \sin\theta \geq 0,\ \rho^6 \leq 4\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\} = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 2\sin\theta\cos\theta\}$. Quindi area$(D) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\sin\theta\cos\theta} \rho d\rho\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta) d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t - \sin t\cos t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}$.

5. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale: $y'' - 2ay' + a^2y = e^x$ al variare del paramentro reale a.

Il polinomio caratteristico dell'equazione ha come radice $\lambda = a$ di molteplicità 2. Se $a \neq 1$ una soluzione particolare dell'equazione è $\bar{y} = \frac{1}{(1-a)^2}e^x$, dunque l'integrale generale dell'equazione è $y = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax} + \frac{1}{(1-a)^2}e^x$.

Se $a = 1$ una soluzione particolare dell'equazione è $\bar{y} = \frac{1}{2}x^2e^x$, dunque l'integrale generale dell'equazione è $y = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax} + \frac{1}{2}x^2e^x$.