Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**16 luglio 2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro k definita da

$$f(x, y, z) = (kx + z, ky, x + kz).$$

(a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Soluzione.

(a) Sia $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$; $\det A = k(k^2 - 1)$.

Se $k \neq 0, 1, -1$ $r(A) = 3 = \dim(\operatorname{im}(f))$ (una base è la base canonica di $\mathbb{R}^3$) e $\dim(\ker(f)) = 0$.

Se $k = 0$, $r(A) = 2 = \dim(\operatorname{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$.

Se $k = 1$, $r(A) = 2 = \dim(\operatorname{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

Se $k = -1$, $r(A) = 2 = \dim(\operatorname{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

(b) A è simmetrica, quindi ortogonalmente diagonalizzabile. Gli autovalori sono $\lambda_{1,2,3} = k - 1, k, k + 1$, con autospazi rispettivamente generati dai vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Una base ortonormale di autovettori è dunque:

$$\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

2. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$$

(a) scrivere la soluzione generale;

(b) determinare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione che soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione.

(a) Il sistema ha soluzioni del tipo $e^{\lambda t}\mathbf{h}$ se $\mathbf{h}$ è autovettore associato all'autovalore λ della matrice di coefficienti. Gli autovalori della matrice dei coefficienti sono 0 e -2, con autovettori rispettivamente $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. La soluzione generale risulta

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) La soluzione particolare che soddisfa il problema di Cauchy assegnato è

$$\begin{cases} x(t) = 4 - 2e^{-2t} \\ y(t) = -2 + 2e^{-2t} \end{cases}$$

da cui, per $t \to +\infty$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Stabilire dove il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y) = \left(\frac{4x^3y^2}{1+x^4}\right)\mathbf{i} + \big(2y\ln(1+x^4)\big)\,\mathbf{j}$$

è definito e se è conservativo nel suo insieme di definizione (motivando la risposta).

(b) Nel caso in cui il campo sia conservativo nel suo insieme di definizione determinare un potenziale.

(c) Calcolare il lavoro del campo lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ percorsa una sola volta in senso orario.

Soluzione.

(a) Le funzioni

$$X(x,y) = \frac{4x^3y^2}{1+x^4}, \qquad Y(x,y) = 2y\ln(1+x^4)$$

sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

L'insieme $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e il campo è irrorazionale

$$X_y = Y_x = \frac{8x^3y}{1+x^4}$$

quindi è conservativo.

(b) Un potenziale è dato da

$$U(x,y) = \int_0^x X(t,y)dt + \int_0^y Y(0,\tau)d\tau = \int_0^x \frac{4t^3y^2}{1+t^4}dt + 0 = y^2\ln(1+x^4).$$

(c) Poichè il campo è conservativo l'integrale lungo ogni linea chiusa nel piano è nullo.

4. Calcolare il flusso del vettore

$$\mathbf{F} = \frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + (z\, e^{(x^2+y^2)^2}\, \sqrt{x^2+y^2})\mathbf{k}$$

attraverso il bordo (orientato con la normale esterna) della porzione dello spazio $E \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\},$$

utilizzando il teorema della divergenza.

Soluzione.

La divergenza del campo è data da

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{3}x^3\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{3}y^3\Big) + \frac{\partial}{\partial z}(z\, e^{(x^2+y^2)^2}\, \sqrt{x^2+y^2}) \\ &= x^2 + y^2 + (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Quindi il flusso si ottiene come segue

$$\Phi_{\partial E}(\mathbf{F}) = \iiint_E \mathrm{div}(\mathbf{F}) dxdydz$$

$$\begin{aligned} &= \iint_D dxdy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2 + y^2 + e^{(x^2+y^2)^2}\, \sqrt{x^2+y^2})dz \\ &= \iint_D \Big(x^2 + y^2 + e^{(x^2+y^2)^2}\, \sqrt{x^2+y^2}\Big)\, \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^4 + \rho^3 e^{\rho^4})\, d\rho \\ &= 2\pi\Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}(e-1)\Big). \end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**16 luglio 2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro k definita da

$$f(x, y, z) = (kx + 2z, ky, 2x + kz).$$

(a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Soluzione.

(a) Sia $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & k \end{bmatrix}$; $\det A = k(k^2 - 4)$.

Se $k \neq 0, 2, -2$ $r(A) = 3 = \dim(\mathrm{im}(f))$ (una base è la base canonica di $\mathbb{R}^3$) e $\dim(\ker(f)) = 0$.

Se $k = 0$, $r(A) = 2 = \dim(\mathrm{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$.

Se $k = 2$, $r(A) = 2 = \dim(\mathrm{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

Se $k = -2$, $r(A) = 2 = \dim(\mathrm{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

(b) A è simmetrica, quindi ortogonalmente diagonalizzabile. Gli autovalori sono $\lambda_{1,2,3} = k - 2, k, k + 2$, con autospazi rispettivamente generati dai vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una base ortonormale di autovettori è dunque:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

2. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

(a) scrivere la soluzione generale;

(b) determinare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione che soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione.

(a) Il sistema ha soluzioni del tipo $e^{\lambda t}\mathbf{h}$ se $\mathbf{h}$ è autovettore associato all'autovalore λ della matrice di coefficienti. Gli autovalori della matrice dei coefficienti sono 0 e -1, con autovettori rispettivamente $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. La soluzione generale risulta

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) La soluzione particolare che soddisfa il problema di Cauchy assegnato è

$$\begin{cases} x(t) = 4 - 2e^{-t} \\ y(t) = -2 + 2e^{-t} \end{cases}$$

da cui, per $t \to +\infty$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Stabilire dove il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y) = \left(\frac{3x^3y^2}{1+x^4}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{2}y\ln(1+x^4)\right)\mathbf{j}$$

è definito e se è conservativo nel suo insieme di definizione (motivando la risposta).

(b) Nel caso in cui il campo sia conservativo nel suo insieme di definizione determinare un potenziale.

(c) Calcolare il lavoro del campo lungo la circonferenza $x^2+y^2=1$ percorsa una sola volta in senso orario.

Soluzione.

(a) Le funzioni

$$X(x,y) = \frac{3x^3y^2}{1+x^4}, \qquad Y(x,y) = \frac{3}{2}y\ln(1+x^4)$$

sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

L'insieme $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e il campo è irrorazionale

$$X_y = Y_x = \frac{6x^3y}{1+x^4}$$

quindi è conservativo.

(b) Un potenziale è dato da

$$U(x,y) = \int_0^x X(t,y)dt + \int_0^y Y(0,\tau)d\tau = \int_0^x \frac{3t^3y^2}{1+t^4}dt + 0 = \frac{3}{4}y^2\ln(1+x^4).$$

(c) Poichè il campo è conservativo l'integrale lungo ogni linea chiusa nel piano è nullo.

4. Calcolare il flusso del vettore

$$\mathbf{F} = \frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + (z\, e^{(x^2+y^2)^2}\,\sqrt{x^2+y^2})\mathbf{k}$$

attraverso il bordo (orientato con la normale esterna) della porzione dello spazio $E \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 1, \ \ 0 \leq z \leq 2\sqrt{x^2+y^2}\},$$

utilizzando il teorema della divergenza.

Soluzione.

La divergenza del campo è data da

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{3}x^3\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{3}y^3\Big) + \frac{\partial}{\partial z}(z\, e^{(x^2+y^2)^2}\,\sqrt{x^2+y^2}) \\ &= x^2+y^2+(x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Quindi il flusso si ottiene come segue

$$\Phi_{\partial E}(\mathbf{F}) = \iiint_E \mathrm{div}(\mathbf{F})dxdydz$$

$$\begin{aligned}&= \iint_D dxdy \int_0^{2\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2+e^{(x^2+y^2)^2}\,\sqrt{x^2+y^2})dz \\ &= 2\iint_D \Big(x^2+y^2+e^{(x^2+y^2)^2}\,\sqrt{x^2+y^2}\Big)\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \\ &= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^4+\rho^3 e^{\rho^4})\,d\rho \\ &= 4\pi\Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}(e-1)\Big).\end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**	**16 luglio 2015**
Cognome: **Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro k definita da

$$f(x, y, z) = (kx + 3z, ky, 3x + kz).$$

(a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Soluzione.

(a) Sia $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & k \end{bmatrix}$; $\det A = k(k^2 - 9)$.

Se $k \neq 0, 3, -3$ $r(A) = 3 = \dim(\mathrm{im}(f))$ (una base è la base canonica di $\mathbb{R}^3$) e $\dim(\ker(f)) = 0$.

Se $k = 0$, $r(A) = 2 = \dim(\mathrm{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$.

Se $k = 3$, $r(A) = 2 = \dim(\mathrm{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

Se $k = -3$, $r(A) = 2 = \dim(\mathrm{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

(b) A è simmetrica, quindi ortogonalmente diagonalizzabile. Gli autovalori sono $\lambda_{1,2,3} = k - 3, k, k + 3$, con autospazi rispettivamente generati dai vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una base ortonormale di autovettori è dunque:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

2. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = 4x + 8y \\ y' = -4x - 8y \end{cases}$$

(a) scrivere la soluzione generale;

(b) determinare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione che soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione.

(a) Il sistema ha soluzioni del tipo $e^{\lambda t}\mathbf{h}$ se $\mathbf{h}$ è autovettore associato all'autovalore λ della matrice di coefficienti. Gli autovalori della matrice dei coefficienti sono 0 e -4, con autovettori rispettivamente $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. La soluzione generale risulta

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) La soluzione particolare che soddisfa il problema di Cauchy assegnato è

$$\begin{cases} x(t) = 4 - 2e^{-4t} \\ y(t) = -2 + 2e^{-4t} \end{cases}$$

da cui, per $t \to +\infty$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Stabilire dove il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y) = \left(\frac{2x^3y^2}{1+x^4}\right)\mathbf{i} + \big(y\ln(1+x^4)\big)\,\mathbf{j}$$

è definito e se è conservativo nel suo insieme di definizione (motivando la risposta).

(b) Nel caso in cui il campo sia conservativo nel suo insieme di definizione determinare un potenziale.

(c) Calcolare il lavoro del campo lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ percorsa una sola volta in senso orario.

Soluzione.

(a) Le funzioni

$$X(x,y) = \frac{2x^3y^2}{1+x^4}, \qquad Y(x,y) = y\ln(1+x^4)$$

sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

L'insieme $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e il campo è irrorazionale

$$X_y = Y_x = \frac{4x^3y}{1+x^4}$$

quindi è conservativo.

(b) Un potenziale è dato da

$$U(x,y) = \int_0^x X(t,y)dt + \int_0^y Y(0,\tau)d\tau = \int_0^x \frac{2t^3y^2}{1+t^4}dt + 0 = \frac{1}{2}y^2\ln(1+x^4).$$

(c) Poichè il campo è conservativo l'integrale lungo ogni linea chiusa nel piano è nullo.

4. Calcolare il flusso del vettore
$$\mathbf{F} = \frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + (z\,e^{(x^2+y^2)^2}\,\sqrt{x^2+y^2})\mathbf{k}$$
attraverso il bordo (orientato con la normale esterna) della porzione dello spazio $E \subset \mathbb{R}^3$ definita da
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 3\sqrt{x^2+y^2}\}$$
utilizzando il teorema della divergenza.

Soluzione.

La divergenza del campo è data da
$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{3}x^3\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{3}y^3\Big) + \frac{\partial}{\partial z}(z\,e^{(x^2+y^2)^2}\,\sqrt{x^2+y^2}) \\ &= x^2+y^2+(x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$
Quindi il flusso si ottiene come segue
$$\Phi_{\partial E}(\mathbf{F}) = \iiint_E \mathrm{div}(\mathbf{F})dxdydz$$
$$\begin{aligned}&= \iint_D dxdy \int_0^{3\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2+e^{(x^2+y^2)^2}\,\sqrt{x^2+y^2})dz \\ &= 3\iint_D \Big(x^2+y^2+e^{(x^2+y^2)^2}\,\sqrt{x^2+y^2}\Big)\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \\ &= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^4+\rho^3 e^{\rho^4})\,d\rho \\ &= 6\pi\Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}(e-1)\Big).\end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**16 luglio 2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro k definita da

$$f(x, y, z) = (kx + 4z, ky, 4x + kz).$$

(a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Soluzione.

(a) Sia $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 4 \\ 0 & k & 0 \\ 4 & 0 & k \end{bmatrix}$; $\det A = k(k^2 - 16)$.

Se $k \neq 0, 4, -4$ $r(A) = 3 = \dim(\mathrm{im}(f))$ (una base è la base canonica di $\mathbb{R}^3$) e $\dim(\ker(f)) = 0$.

Se $k = 0$, $r(A) = 2 = \dim(\mathrm{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$.

Se $k = 4$, $r(A) = 2 = \dim(\mathrm{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

Se $k = -4$, $r(A) = 2 = \dim(\mathrm{im}(f))$; base dell'immagine $\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$; base del nucleo $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

(b) A è simmetrica, quindi ortogonalmente diagonalizzabile. Gli autovalori sono $\lambda_{1,2,3} = k - 4, k, k + 4$, con autospazi rispettivamente generati dai vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una base ortonormale di autovettori è dunque:

$$\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

2. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = 3x + 6y \\ y' = -3x - 6y \end{cases}$$

(a) scrivere la soluzione generale;

(b) determinare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione che soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione.

(a) Il sistema ha soluzioni del tipo $e^{\lambda t}\mathbf{h}$ se $\mathbf{h}$ è autovettore associato all'autovalore λ della matrice di coefficienti. Gli autovalori della matrice dei coefficienti sono 0 e -3, con autovettori rispettivamente $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. La soluzione generale risulta

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) La soluzione particolare che soddisfa il problema di Cauchy assegnato è

$$\begin{cases} x(t) = 4 - 2e^{-3t} \\ y(t) = -2 + 2e^{-3t} \end{cases}$$

da cui, per $t \to +\infty$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Stabilire dove il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y) = \left(\frac{x^3y^2}{1+x^4}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}y\ln(1+x^4)\right)\mathbf{j}$$

è definito e se è conservativo nel suo insieme di definizione (motivando la risposta).

(b) Nel caso in cui il campo sia conservativo nel suo insieme di definizione determinare un potenziale.

(c) Calcolare il lavoro del campo lungo la circonferenza $x^2+y^2=1$ percorsa una sola volta in senso orario.

Soluzione.

(a) Le funzioni

$$X(x,y) = \frac{x^3y^2}{1+x^4}, \qquad Y(x,y) = \frac{1}{2}y\ln(1+x^4)$$

sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
L'insieme $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e il campo è irrorazionale

$$X_y = Y_x = \frac{2x^3y}{1+x^4}$$

quindi è conservativo.

(b) Un potenziale è dato da

$$U(x,y) = \int_0^x X(t,y)dt + \int_0^y Y(0,\tau)d\tau = \int_0^x \frac{t^3y^2}{1+t^4}dt + 0 = \frac{1}{4}y^2\ln(1+x^4).$$

(c) Poichè il campo è conservativo l'integrale lungo ogni linea chiusa nel piano è nullo.

4. Calcolare il flusso del vettore

$$\mathbf{F} = \frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + (z\, e^{(x^2+y^2)^2}\, \sqrt{x^2+y^2})\mathbf{k}$$

attraverso il bordo (orientato con la normale esterna) della porzione dello spazio $E \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 4\sqrt{x^2+y^2}\},$$

utilizzando il teorema della divergenza.

Soluzione.

La divergenza del campo è data da

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{3}x^3\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{3}y^3\Big) + \frac{\partial}{\partial z}(z\, e^{(x^2+y^2)^2}\, \sqrt{x^2+y^2}) \\ &= x^2 + y^2 + (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Quindi il flusso si ottiene come segue

$$\Phi_{\partial E}(\mathbf{F}) = \iiint_E \mathrm{div}(\mathbf{F})dxdydz$$

$$\begin{aligned}&= \iint_D dxdy \int_0^{4\sqrt{x^2+y^2}} (x^2 + y^2 + e^{(x^2+y^2)^2}\, \sqrt{x^2+y^2})dz \\ &= 4\iint_D \Big(x^2 + y^2 + e^{(x^2+y^2)^2}\, \sqrt{x^2+y^2}\Big)\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \\ &= 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^4 + \rho^3 e^{\rho^4})\, d\rho \\ &= 8\pi\Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}(e-1)\Big).\end{aligned}$$