POLITECNICO DI MILANO – IV FACOLTÀ

Ingegneria Aerospaziale

Fisica Sperimentale A+B - I Appello 16 Luglio 2007

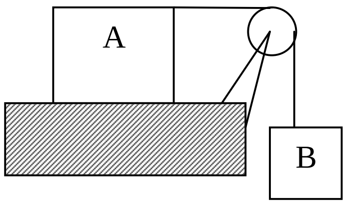
Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. Sostituire i valori numerici solo alla fine, dopo aver ricavato le espressioni letterali. Indicare nome e cognome (in stampatello) e matricola su ogni foglio

1. a) Data una forza agente su una particella di massa m per un intervallo finito di tempo, si definisca il lavoro da essa compiuto e lo si ponga in relazione con altre grandezze dinamiche significative del moto della particella.
   b) Si dia la definizione di forza conservativa. Si dia un esempio di forza conservativa. Si dimostri in base alla definizione data che la forza scelta è effettivamente conservativa.
   c) Si consideri una catena trattenuta su un tavolo privo di attrito con un quarto della sua lunghezza pendente dal bordo. Se essa ha una lunghezza l e una massa m, calcolare il lavoro necessario per portare sul tavolo la parte pendente della catena.

2. Due particelle, di massa m e $2m$, si trovano su una guida circolare orizzontale e priva di attrito. La prima massa è ferma, la seconda è in moto in senso antiorario con velocità v. Tra le due particelle avviene un urto elastico istantaneo.
   a) Trovare le velocità delle due particelle dopo l'urto.
   b) Determinare in corrispondenza di quale angolo, rispetto alla posizione iniziale della prima massa, avviene il secondo urto.
   c) Determinare la velocità delle masse dopo il secondo urto (anch'esso istantaneo).

3. Si calcoli la differenza che intercorre nella misura del peso di un corpo di massa pari a 1 kg che si trovi sulla superficie terrestre
   a) all'equatore;
   b) a Milano (latitudine ~45°).
   c) Si specifichi qual è la direzione di tale forza nei due casi.
   Considerare solamente il moto di rotazione della terra attorno al proprio asse.
   (Raggio della terra = 6.37×10^6 m)

4. Il blocco A ha massa pari a $m_A = 4.4$ kg. I coefficienti di attrito statico e dinamico tra il blocco A ed il tavolo sono rispettivamente $\mu_S = 0.18$ e $\mu_D = 0.15$. Determinare:
   a) la minima massa m_B del blocco B che fa scivolare il blocco A;
   b) l'accelerazione di A quando la massa m_B è quella calcolata nel punto a) e il sistema è in moto;
   c) la tensione T del filo nel caso statico e dinamico, quando la massa m_B è quella calcolata nel punto a).



Esercizio 1

a) La definizione di lavoro L compiuto da una forza $\mathbf{F}$ lungo una traiettoria g è la seguente:

$$L = \int_g \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l},$$

dove d**l** corrisponde all'elemento di lunghezza della traiettoria.
Il teorema delle forze vive mette in relazione il lavoro della *risultante* $\mathbf{F}_{\mathrm{tot}}$ delle forze agenti su una particella con la variazione di energia cinetica della particella stessa:

$$L = \int_g \mathbf{F}_{\mathrm{tot}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_g m\mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_g m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_g m\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{v} = \int_g mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{i}}^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad L = \Delta E_{\mathrm{kin}}.$$

Un'altra grandezza legata al lavoro è la potenza W di una forza, definita nel modo seguente:

$$W = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}.$$

b) Una forza è conservativa quando il lavoro da essa compiuta dipende solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo, ma non dalla traiettoria percorsa. Esempi di forze conservative sono quelle che hanno direzione *radiale* e che dipendono solo dalla distanza r da un polo (forza elettrica, forza gravitazionale). In questo caso

$$\mathbf{F} = F(r)\mathbf{u}_r,$$

dove $\mathbf{u}_r$ è un versore radiale. In questo caso il lavoro compiuto dalla forza lungo la traiettoria generica g vale

$$L = \int_g \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_g F(r) \cdot \mathrm{d}r.$$

Il lavoro non dipende quindi dalla traiettoria ma soltanto dalla distanza iniziale e finale dal polo.

c) La risultante $\mathbf{F}$ delle forze che agiscono sulla catena è pari al peso della parte di catena che pende dal tavolo. Il peso della parte di catena che si trova già sul tavolo e infatti compensato dalla reazione vincolare del tavolo privo di attrito. Sia x la lunghezza di catena che pende dal tavolo,

$$F = \frac{mgx}{l}.$$

Il lavoro L compiuto da $\mathbf{F}$ è quindi pari a

$$L = \int_g \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{\frac{l}{4}}^{0} F(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{\frac{l}{4}}^{0} \frac{mgx}{l} \cdot \mathrm{d}x = -\frac{mgl}{32}.$$

Il lavoro L' delle forze *esterne* che devono sollevare la catena sul tavolo è quindi pari a

$$L' = -L = \frac{mgl}{32}.$$

Esercizio 2

a) Siano v_1 e v_2 le componenti delle velocità delle particelle di massa rispettivamente *m* e 2*m* lungo la direzione *tangenziale*. L'urto è elastico ed istantaneo, quindi si conservano sia la quantità di moto sia l'energia cinetica totali:

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1'' + m_2 v_2'' ;$$
$$\frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1'')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2'')^2 .$$

Per $v_1' = 0$ e $v_2' = v$ queste due equazioni hanno soluzione

$$v_1'' = \frac{4}{3} v , \qquad v_2'' = \frac{1}{3} v .$$

b) Dette q_1 e q_2 le posizioni angolari delle due masse sulla guida, w_1 e w_2 le velocità angolari delle due masse dopo l'urto e *R* il raggio della guida, si ottiene:

$$q_1(t) = w_1 t = \frac{v_1''}{R} t , \qquad q_2(t) = w_2 t = \frac{v_2''}{R} t .$$

Le due masse si urtano una seconda volta quando le loro posizioni angolari differiscono per un angolo giro:

$$q_1(t) - q_2(t) = 2p \quad \Rightarrow \quad (v_1'' - v_2'') \frac{t}{R} = v \frac{t}{R} = 2p \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2pR}{v} ,$$

ovvero quando

$$q_1 = 2p \frac{v_1''}{v} = \frac{8}{3} p , \qquad q_2 = 2p \frac{v_2''}{v} = \frac{2}{3} p .$$

c) Le due equazioni di cui al punto a), per $v_1' = \frac{4}{3} v$ e $v_2' = \frac{1}{3} v$, hanno ovviamente soluzione:

$$v_1'' = 0, \qquad v_2'' = v,$$

ovvero, dopo il secondo urto le due masse tornano a muoversi alle rispettive velocità iniziali.

Esercizio 3

a) La misura del peso di un oggetto di massa m effettuata sulla superficie terrestre è influenzata dalle forze fittizie, dovute al fatto che la terra non costituisce un sistema di riferimento inerziale. In particolare, poiché la terra ruota attorno al proprio asse, la misura della forza **F** che agisce su un oggetto di massa m in quiete rispetto alla terra è

$$\mathbf{F} = -mg\,\frac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^3}\,\mathbf{r} - m\mathrm{w} \times (\mathrm{w} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{g},$$

dove M_T è la massa della Terra, R_T il suo raggio, g è la costante di gravitazione universale ($g = 6.674 \times 10^{-11}$ $\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$), w il vettore velocità angolare della terra ($w = p/12$ rad/ora), diretto dal polo nord al polo sud, e **r** è la posizione dell'oggetto rispetto al centro della terra. Il vettore $\mathbf{F}_\mathrm{c} = -m\mathrm{w} \times (\mathrm{w} \times \mathbf{r})$ è detto *forza centrifuga* ed è *perpendicolare* all'asse di rotazione terrestre. Il suo modulo è pari a

$$F_\mathrm{c} = m\, w^2 R_\mathrm{T} \cos q,$$

dove q è la latitudine del luogo nel quale viene effettuata la misura. L'accelerazione **g** di un grave nei pressi della superficie terrestre varia quindi con la latitudine. All'equatore ($q = 0$) la forza centrifuga è *opposta* all'attrazione gravitazionale e vale $m\, w^2 R_\mathrm{T}$, quindi

$$g = g\,\frac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2} - w^2 R_\mathrm{T} = 9.78\ \mathrm{m/s^2}.$$

b) A Milano ($q = 45°$), la forza peso e la forza centrifuga formano un angolo pari a $p + q$. Trascurando il fatto che **g** devia dalla direzione radiale si ha

$$g = g\,\frac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2} - w^2 R_\mathrm{T} \cos q = 9.80\ \mathrm{m/s^2}.$$

c) All'equatore **g** è diretta verso il centro della terra. A Milano L'angolo a che **g** forma rispetto al raggio terrestre è invece pari a:

$$a = \mathrm{arctg}\,\frac{w^2 R_\mathrm{T} \cos^2 q}{g\,\dfrac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2} - w^2 R_\mathrm{T} \cos q \,\mathrm{sen}\, q} \approx \mathrm{arctg}\left(\frac{w^2 R_\mathrm{T}^3}{g M_\mathrm{T}} \cos^2 q\right) \approx \frac{w^2 R_\mathrm{T}^3}{g M_\mathrm{T}} \cos^2 q \approx 0.4\ \mathrm{mrad}.$$

Esercizio 4

a) Si considerino, sia per il blocco A, sia per il blocco B, soltanto le componenti delle forze lungo la direzione del moto. In condizioni di quiete, sul blocco A agiscono la forza d'attrito radente statico F_s e la tensione T_S del filo: $F_S \leq m_S g m_A$, $T_S = g m_B$. Queste due forze si devono equivalere, pertanto la massa m_B minima necessaria a smuovere m_A è pari a:

$$m_B = m_S\, m_A = 0.79 \text{ kg.}$$

b) Scriviamo le equazioni del moto dei due corpi in movimento, che hanno lo stesso modulo dell'accelerazione se il filo è inestensibile. Per il corpo A:

$$m_A a = T_D - F_D = T_D - m_D\, g m_A.$$

Per il corpo B:

$$m_B a = m_B g - T_D.$$

Da queste equazioni si ricava l'accelerazione dei due corpi:

$$a = \frac{m_B}{m_A + m_B} g - \frac{m_A}{m_A + m_B} m_D\, g = 0.25 \text{ m/s}^2$$

c) Dalle equazioni del moto dei due corpi riportate al punto b) si ricava anche la tensione dinamica T_D:

$$T_D = m_B(g - a) = g \frac{m_B m_A}{m_A + m_B}(1 + m_D) = 7.55 \text{ N.}$$

La tensione statica T_S è invece pari a

$$T_S = \mathrm{m_B g} = 7.77 \text{ N.}$$

Si noti che $T_S > T_D$.