Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 - primo Appello - 16 Febbraio 2016

Terza parte (Compito A)

Verificare che l'equazione

$$z^3 - (1-2i)\,z^2 - \left[2 + i\left(2+\sqrt{3}\right)\right] z + \left(2 + i\sqrt{3}\right) = 0$$

con $z \in \mathbb{C}$, ammette una radice reale di modulo unitario e trovare le altre radici.

Detto $\mathcal{T}$ l'insieme delle soluzioni, disegnarlo sul piano di Gauss (esplicitando per ogni soluzioen la parte reale e la parte immaginaria).

Soluzioni

Le radici reali con modulo unitario possono essere 1 e -1. Sostituendo $z = 1$ si ottiene $0 = 0$ ed e' quindi la soluzione cercata: $z_1 = 1$.

L'equazione si puo' quindi scomporre come segue:

$$(z-1)\left[z^2 + 2iz - \left(2 + i\sqrt{3}\right)\right] = 0$$

Le altre soluzioni si ottengono come segue:

$$\left[z^2 + 2iz - \left(2 + i\sqrt{3}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow z = -i + \sqrt{1 + i\sqrt{3}}$$

Devo svuluppare per poterle disegnare nel piano di Gauss. La radice vale (considerando che il radicando ha modulo 2 e fase $\frac{\pi}{3}$):

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + i\right)$$

Quindi le altre due soluzioni sono:

$$z_2 = -i + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + i\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

$$z_3 = -i - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + i\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

A questo punto e' immediato disegnare i 3 punti sul piano di Gauss.

Sia f la funzione definita nel modo seguente:

$$f : (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{x+1} e^{-x}$$

per ogni x nel dominio di f.

a. Trovare i limiti di $f(x)$ per $x \to -\infty$, $x \to -1^-$, $x \to -1^+$, $x \to +\infty$.

b. Calcolare la derivata f'.

c. Trovare gli eventuali punti di minimo o massimo locale.

d. Disegnare il grafico di f.

e. Stabilire se è convergente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$

Soluzioni

(a)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(b)

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x + 1}{(x+1)^2}\, e^{-x}$$

(c)

$$x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} : \qquad \text{Punto di minimo locale.}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} : \qquad \text{Punto di massimo locale.}$$

(e)

Su ogni intervallo $[0, b]$, $b > 0$, f è integrabile, perché è continua. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{x}{x+1} e^{-x} \sim e^{-x}$$

Dunque f è integrabile su $(0, +\infty)$.

Stabilire la posizione reciproca delle rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x + 4y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0\,. \end{cases}$$

a. Siano Φ_1 e Φ_2 i fasci di piani che hanno per sostegno rispettivamente le rette r_1 ed r_2. Stabilire se esiste un piano che appartiene a entrambi i fasci Φ_1 e Φ_2.

b. Stabilire se il piano $\pi : x + y + z + 1 = 0$ appartiene al fascio Φ_2.

Soluzione.

I parametri direttori di r_1 sono $(1 : -1 : -2)$. I parametri direttori di r_2 sono

$$\left(\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (6 : 3 : -9) = (2 : 1 : 3)\,.$$

Avendo parametri direttori non proporzionali, le due rette r_1 ed r_2 non sono parallele. Intersecando r_1 ed r_2 si ha il sistema

$$\begin{cases} 1 + t + 4(2 - t) + 2(1 - 2t) - 1 = 0 \\ 2(1 + t) - 2 + t + 1 - 2t + 4 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 7t - 10 = 0 \\ t + 5 = 0\,. \end{cases}$$

Poiché tale sistema è evidentemente incompatibile, le due rette r_1 ed r_2 non sono incidenti. Di conseguenza, non essendo parallele né incidenti, le due rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

a. Se i due fasci Φ_1 e Φ_2 possedessero un piano in comune, allora tale piano conterrebbe i sostegni di entrambi i fasci e quindi le rette r_1 ed r_2 dovrebbero essere complanari. Tuttavia, come è stato mostrato nel punto precedente, le due rette r_1 ed r_2 sono sghembe e quindi non possono essere complanari. Di conseguenza, $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$.

b. Consideriamo, ad esempio, il punto $P \equiv (0, 0, -1)$ che appartiene al piano π, ma non alla retta r. Sia π' il piano appartenente al fascio Φ_2 passante per P. Poiché l'equazione di Φ_2 è

$$\lambda(x + 4y + 2z - 1) + \mu(2x - y + z + 4) = 0\,,$$

imponendo il passaggio per P, si ottiene $-3\lambda + 3\mu = 0$, ossia $\lambda = \mu$. Pertanto, $\pi' : 3x + 3y + 3z + 3 = 0$, ossia $\pi' : x + y + z + 1 = 0$. Di conseguenza, $\pi' = \pi$ e quindi $\pi \in \Phi_2$.

Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y'(t) = 2t\left[y(t)^2 - 1\right].$$

a. Trovare la soluzione $y(t)$ che verifica la condizione $y(0) = 2$;

b. specificare il dominio di definizione della soluzione trovata al punto precedente.

Soluzioni

a. L'equazione é a variabili separabili. Le soluzioni costanti sono $y(t) \equiv 1$ e $y(t) \equiv -1$, mentre le altre soluzioni si trovano con la separazione di variabili. Ricordando che

$$\int \frac{1}{\tau^2 - 1} d\tau = \int \left(\frac{1/2}{\tau - 1} - \frac{1/2}{\tau + 1}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{\tau - 1}{\tau + 1}\right|\right) + c$$

si ha

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)^2 - 1} dt = \int 2t dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{y(t) - 1}{y(t) + 1}\right|\right) = t^2 + c$$

Poiché $y(0) = 2 > 1$, possiamo dedurre che $y(t) > 1$ nel suo dominio di definizione, da cui

$$\frac{y(t) - 1}{y(t) + 1} = Ce^{2t^2} \quad (C = e^c > 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(t) = \frac{1 + Ce^{2t^2}}{1 - Ce^{2t^2}}.$$

Per determinare la costante C imponiamo la condizione iniziale

$$y(0) = \frac{1 + C}{1 - C} = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C = \frac{1}{3}.$$

La soluzione cercata si puó quindi rappresentare con la formula analitica

$$y(t) = \frac{3 + e^{2t^2}}{3 - e^{2t^2}}.$$

b. Definiamo

$$f(t) = \frac{3 + e^{2t^2}}{3 - e^{2t^2}}.$$

Tale funzione ammette come dominio di definizione l'insieme

$$\left\{t \in \mathbb{R} : e^{2t^2} \neq 3\right\} = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{\ln 3}}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{\ln 3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\ln 3}}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{\ln 3}}{\sqrt{2}}, +\infty\right).$$

Poiché

$$0 \in \left(-\frac{\sqrt{\ln 3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\ln 3}}{\sqrt{2}}\right),$$

quest'ultimo é l'intervallo di definizione della soluzione y.

Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 - Primo Appello - 16 Febbraio 2016

Terza parte (Compito B)

Verificare che l'equazione

$$z^3 + iz^2 - i\sqrt{3}z - \left(\sqrt{3} - 2i\right) = 0$$

con $z \in \mathbb{C}$, ammette una radice immaginaria pura di modulo unitario e trovare le altre radici.

Detto $\mathcal{T}$ l'insieme delle soluzioni, disegnarlo sul piano di Gauss (esplicitando per ogni soluzioen la parte reale e la parte immaginaria).

Soluzioni

Le radici immaginarie pure con modulo unitario possono essere i e $-i$. Sostituendo $z = i$ si ottiene $0 = 0$ ed e' quindi la soluzione cercata: $z_1 = i$.

L'equazione si puo' quindi scomporre come segue:

$$(z - i)\left[z^2 + 2iz - \left(2 + i\sqrt{3}\right)\right] = 0$$

Le altre soluzioni si ottengono come segue:

$$\left[z^2 + 2iz - \left(2 + i\sqrt{3}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow z = -i + \sqrt{1 + i\sqrt{3}}$$

Devo svuluppare per poterle disegnare nel piano di Gauss. La radice vale (considerando che il radicando ha modulo 2 e fase $\frac{\pi}{3}$):

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + i\right)$$

Quindi le altre due soluzioni sono:

$$z_2 = -i + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + i\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

$$z_3 = -i - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + i\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

A questo punto e' immediato disegnare i 3 punti sul piano di Gauss.

Sia f la funzione definita nel modo seguente:

$$f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x-1}{x} e^{-x}$$

per ogni x nel dominio di f.

a. Trovare i limiti di $f(x)$ per $x \to -\infty$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, $x \to +\infty$.

b. Calcolare la derivata f'.

c. Trovare gli eventuali punti di minimo o massimo locale.

d. Disegnare il grafico di f.

e. Stabilire se è convergente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$

Soluzioni

(a)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(b)

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x + 1}{x^2}\, e^{-x}$$

(c)

$$x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} : \qquad \text{Punto di minimo locale.}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} : \qquad \text{Punto di massimo locale.}$$

(e)

Su ogni intervallo $(0, b]$, $b > 0$, f è continua e negativa. Possiamo quindi applicare il criterio di asintoticitá. Poiché per $x \to 0^+$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x} e^{-x} \sim -\frac{1}{x},$$

allora f non è integrabile su $(0, b]$, e di conseguenza anche su $(0, +\infty)$.

Stabilire la posizione reciproca delle rette

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ x + 6y + 3z - 10 = 0 \,. \end{cases}$$

a. Stabilire se le rette r ed s sono complanari. In caso affermativo, determinare il piano π che le contiene.

b. Determinare i punti di r che distano $\sqrt{6}$ dal piano $\pi' : x + y - 2z + 1 = 0$.

Soluzione.

I parametri direttori di r sono $(-1 : 1 : -2) = (1 : -1 : 2)$. I parametri direttori di s sono

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \right) = (12 : -4 : 4) = (3 : -1 : 1) \,.$$

Avendo parametri direttori non proporzionali, le due rette r ed s non sono parallele. Intersecando r ed s si ha il sistema

$$\begin{cases} 2 - t + 2 + 2t - 1 + 2t - 6 = 0 \\ 2 - t + 6 + 6t + 3 - 6t - 10 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} t - 1 = 0 \\ t - 1 = 0 \,. \end{cases}$$

Poiché tale sistema è compatibile, avendo come unica soluzione $t = 1$, le due rette r ed s sono incidenti nel punto $P \equiv (1, 2, -1)$.

a. Essendo incidenti, le due rette r ed s sono complanari. Il piano π che le contiene passa per il punto P e ha come direzione ortogonale quella data dal vettore

$$(1, -1, 2) \wedge (3, -1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 5, 2) \,.$$

Pertanto, si ha

$$\pi \ : \ 1(x - 1) + 5(y - 2) + 2(z + 1) = 0$$

ossia

$$\pi \ : \ x + 5y + 2z - 9 = 0 \,.$$

b. Consideriamo il generico punto $Q \equiv (2 - t, 1 + t, 1 - 2t)$ della retta r. Allora, si ha

$$\mathbf{d}(Q, \pi') = \frac{|2 - t + 1 + t - 2 + 4t + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{|4t + 2|}{\sqrt{6}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(Q, \pi') = \sqrt{6} \quad &\iff \quad \frac{|4t + 2|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \\ &\iff \quad |4t + 2| = 6 \\ &\iff \quad 4t + 2 = \pm 6 \\ &\iff \quad 4t = -2 \pm 6 \\ &\iff \quad t = -2, 1 \,. \end{aligned}$$

Pertanto, si hanno i punti $Q_1 \equiv (4, -1, 5)$ e $Q_2 = P \equiv (1, 2, -1)$.

Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y'(t) = (2t-1)\left[y(t)^2 - 1\right].$$

a. Trovare la soluzione $y(t)$ che verifica la condizione $y(0) = 0$, specificandone l'intervallo di definizione;

b. stabilire eventuali punti di massimo oppure minimo di y.

Soluzioni

a. L'equazione é a variabili separabili. Le soluzioni costanti sono $y(t) \equiv 1$ e $y(t) \equiv -1$, mentre le altre soluzioni si trovano con la separazione di variabili. Ricordando che

$$\int \frac{1}{\tau^2-1}d\tau = \int \left(\frac{1/2}{\tau-1} - \frac{1/2}{\tau+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{\tau-1}{\tau+1}\right|\right) + c$$

si ha

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)^2-1}dt = \int (2t-1)dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{y(t)-1}{y(t)+1}\right|\right) = t^2 - t + c$$

Poiché $-1 < y(0) = 0 < 1$, possiamo dedurre che $-1 < y(t) < 1$ nel suo dominio di definizione, da cui

$$\frac{1-y(t)}{y(t)+1} = Ce^{2(t^2-t)} \quad (C = e^c > 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(t) = \frac{1-Ce^{2(t^2-t)}}{1+Ce^{2(t^2-t)}}.$$

Per determinare la costante C imponiamo la condizione iniziale

$$y(0) = \frac{1-C}{1+C} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C = 1.$$

La soluzione cercata si puó quindi rappresentare con la formula analitica

$$y(t) = \frac{1-e^{2(t^2-t)}}{1+e^{2(t^2-t)}}.$$

Tale soluzione é definita su tutto $\mathbb{R}$.

b. Ricordando la limitazione $-1 < y(t) < 1$, considerando l'equazione abbiamo

$$y'(t) \begin{cases} > 0 & \Longleftrightarrow \quad t < \frac{1}{2}, \\ = 0 & \Longleftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}, \\ < 0 & \Longleftrightarrow \quad t > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

da cui possiamo dedurre che y ammette un unico punto di massimo (assoluto) in $t = 1/2$.