Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**15 Luglio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il nucleo dell'operatore lineare associato alla matrice $\mathbf{A}$.

Soluzione: $\det \mathbf{A} = 8 - 2\alpha^2$, dunque se $\alpha \neq \pm 2$ la matrice $\mathbf{A}$ è nonsingolare, e $\ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$; per $\alpha = \pm 2$, cioè $\alpha^2 = 4$, si ricava $x = -2z$, $y = \frac{1}{2}(z - x) = \frac{3}{2}z$, in definitiva

$$\alpha \neq \pm 2 \;\Rightarrow\; \ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\} \qquad\qquad \alpha = \pm 2 \;\Rightarrow\; \ker \mathbf{A} = \left\{ \begin{bmatrix} -4k \\ 3k \\ 2k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ove $\mathbf{b} = [\alpha + 1, 4, 1]^T$.

Soluzione: Se $\alpha \neq \pm 2$ il sistema ammette un'unica soluzione, se $\alpha = \pm 2$, la matrice completa è rispettivamente

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(\alpha=2)} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(\alpha=-2)}$$

– per $\alpha = 2$ $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ e il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un parametro,
– per $\alpha = -2$ $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.

c) Posto $\alpha = \sqrt{2}$, stabilire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ (giustificare la risposta).

Soluzione: Per $\alpha = \sqrt{2}$ la matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica, dunque è ortogonalmente diagonalizzabile, esiste pertanto una base ortogonale di autovettori di $\mathbf{A}$.

2. (a) Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{G}(x,y,z) = yz\mathbf{i},$$

e la superficie S definita da

$$x(u,v) = uv, \quad y(u,v) = u^2, \quad z(u,v) = u+v, \quad \text{dove} \quad (u,v) \in D := [0,1] \times [0,1].$$

Calcolare, utilizzando il teorema di Stokes, il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{G}$ lungo il bordo $\partial^+ S$ di S.

(b) Stabilire se le seguenti serie numeriche

$$(I): \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n(n^2+1)}, \qquad\qquad (II): \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1},$$

sono convergenti.

Soluzione:

(a) Per il teorema di Stokes il lavoro $L_{\partial^+ S}(\mathbf{G})$ si ottiene tramite il seguente flusso

$$L_{\partial^+ S}(\mathbf{G}) = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} dS.$$

L'integrale di superficie diventa:

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{G}(u,v) \cdot P_u \wedge P_v du dv$$

dove

$$\operatorname{rot} \mathbf{G}(u,v) = u^2\mathbf{j} - (u+v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D$$
$$P(u,v) = uv\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + (u+v)\mathbf{k}$$
$$P_u \wedge P_v = 2u\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} - 2u^2\mathbf{k}$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{G}(u,v) \cdot P_u \wedge P_v du dv = [3u^3 + u^2 v] du dv.$$

Quindi si ha

$$L_{\partial^+ S}(\mathbf{G}) = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} dS = \int_0^1 du \int_0^1 [3u^3 + u^2 v] dv = \frac{11}{12}.$$

(b) La serie (I) è convergente. Infatti osserviamo che è a termini positivi e che vale la stima

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n(n^2+1)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Per il criterio del confronto si deduce la convergenza dato che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ è convergente.
Lo stesso risultato si può ottenere anche in altri modi, ad esempio, con il criterio del rapporto.
La serie (II) non converge perchè il termine $\frac{n}{n+1}$ non tende a zero per n che tende all'infinito.

3. Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{2xy}{x^4+y^2}\mathbf{i} - \frac{x^2}{x^4+y^2}\mathbf{j}.$$

(a) Giustificare il fatto che nel semipiano $y \geq 1/2$ il campo $\mathbf{F}$ ammette un potenziale e determinarlo.

(b) Verificare se il campo è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soluzione:

(a) Il campo $\mathbf{F}(x,y)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Il semipiano $y \geq 1/2$ è semplicemente connesso, non contiene l'origine ed il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale, non solo sul semipiano, ma in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y) = 0.$$

Quindi, nel semipiano $y \geq 1/2$, ammette un potenziale.
Prendiamo $P(0,1)$ che appartiene al semipiano $y \geq 1/2$. Un potenziale è dato da

$$U(x,y) = \int_0^x \frac{2xy}{x^4+y^2}dx = \arctan(x^2/y).$$

(b) Osserviamo che il potenziale determinato nel punto (a) è $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
Dato che

$$\nabla U(x,y) = \frac{2xy}{x^4+y^2}\mathbf{i} - \frac{x^2}{x^4+y^2}\mathbf{j}$$

si ha $\mathbf{F}(x,y) = \nabla U(x,y)$ quindi il campo $\mathbf{F}(x,y)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. (a) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$

(b) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 2e^t.$$

Soluzione:

(a) L'equazione caratteristica è $(\lambda - 1)^2 = 0$. L'integrale generale risulta quindi essere

$$x(t) = (A + Bt)e^t.$$

Calcolando la derivata prima della soluzione e imponendo le due condizioni $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ otteniamo

$$A = 1, \qquad B = -1$$

da cui si ha

$$x(t) = (1 - t)e^t.$$

(b) L'integrale generale della seconda equazione è dato dalla somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di un integrale particolare dell'equazione (b). Determiniamo quest'ultimo. Poichè l'unica radice dell'equazione caratteristica ha molteplicità $\mu = 2$, cerchiamo una soluzione particolre del tipo $v(t) = Ct^2e^t$. Derivando e sostituendo nell'equazione (b) troviamo $C = 1$. Quindi l'integrale generale della (b) è dato da

$$y(t) = x(t) + v(t) = (A + Bt)e^t + t^2e^t.$$

Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**15 Luglio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia data la matrice
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & \alpha^2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il nucleo dell'operatore lineare associato alla matrice $\mathbf{A}$.

Soluzione: $\det \mathbf{A} = 8 - 2\alpha^2$, dunque se $\alpha \neq \pm 2$ la matrice $\mathbf{A}$ è nonsingolare, e $\ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$; per $\alpha = \pm 2$, cioè $\alpha^2 = 4$, si ricava $x = -z$, $y = \frac{1}{4}(z - x) = \frac{1}{2}z$, in definitiva
$$\alpha \neq \pm 2 \;\Rightarrow\; \ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\} \qquad\qquad \alpha = \pm 2 \;\Rightarrow\; \ker \mathbf{A} = \left\{ \begin{bmatrix} -2k \\ k \\ 2k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ove $\mathbf{b} = [\alpha + 1, -2, 1]^T$.

Soluzione: Se $\alpha \neq \pm 2$ il sistema ammette un'unica soluzione, se $\alpha = \pm 2$, la matrice completa è rispettivamente
$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(\alpha=2)} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(\alpha=-2)}$$

- per $\alpha = 2$ $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ e il sistema non ammette soluzione,
- per $\alpha = -2$ $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ e il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un parametro.

c) Posto $\alpha = -\sqrt{2}$, stabilire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ (giustificare la risposta).

Soluzione: Per $\alpha = -\sqrt{2}$ la matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica, dunque è ortogonalmente diagonalizzabile, esiste pertanto una base ortogonale di autovettori di $\mathbf{A}$.

2. (a) Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{G}(x, y, z) = -yz\mathbf{i},$$

e la superficie S definita da

$$x(u, v) = uv, \quad y(u, v) = u^2, \quad z(u, v) = u + v, \quad \text{dove} \quad (u, v) \in D := [0, 1] \times [0, 1].$$

Calcolare, utilizzando il teorema di Stokes, il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{G}$ lungo il bordo $\partial^+ S$ di S.

(b) Stabilire se le seguenti serie numeriche

$$(I): \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n(n^3 + 1)}, \qquad (II): \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1},$$

sono convergenti.

Soluzione:

(a) Per il teorema di Stokes il lavoro $L_{\partial^+ S}(\mathbf{G})$ si ottiene tramite il seguente flusso

$$L_{\partial^+ S}(\mathbf{G}) = \int\!\!\int_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} dS.$$

L'integrale di superficie diventa:

$$\int\!\!\int_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} dS = \int\!\!\int_D \operatorname{rot} \mathbf{G}(u, v) \cdot P_u \wedge P_v du dv$$

dove

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{G}(u, v) &= -u^2\mathbf{j} + (u + v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \\ P(u, v) &= uv\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + (u + v)\mathbf{k} \\ P_u \wedge P_v &= 2u\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} - 2u^2\mathbf{k} \\ \operatorname{rot} \mathbf{G}(u, v) \cdot P_u \wedge P_v du dv &= -[3u^3 + u^2 v] du dv. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$L_{\partial^+ S}(\mathbf{G}) = \int\!\!\int_S rot\mathbf{G} \cdot \mathbf{N} dS = -\int_0^1 du \int_0^1 [3u^3 + u^2 v] dv = -\frac{11}{12}.$$

(b) La serie (I) è convergente. Infatti osserviamo che è a termini positivi e che vale la stima

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n(n^3 + 1)} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Per il criterio del confronto si deduce la convergenza dato che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ è convergente.
Lo stesso risultato si può ottenere anche in altri modi, ad esempio, con il criterio del rapporto.
La serie (II) non converge perchè il termine $\frac{n^2}{n^2+1}$ non tende a zero per n che tende all'infinito.

3. Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathbf{i} + \frac{x^2}{x^4+y^2}\mathbf{j}.$$

(a) Giustificare il fatto che nel semipiano $y \geq 1/2$ il campo $\mathbf{F}$ ammette un potenziale e determinarlo.

(b) Verificare se il campo è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soluzione:

(a) Il campo $\mathbf{F}(x,y)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Il semipiano $y \geq 1/2$ è semplicemente connesso, non contiene l'origine ed il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale, non solo sul semipiano, ma in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y) = 0.$$

Quindi, nel semipiano $y \geq 1/2$, ammette un potenziale.
Prendiamo $P(0,1)$ che appartiene al semipiano $y \geq 1/2$. Un potenziale è dato da

$$U(x,y) = -\int_0^x \frac{2xy}{x^4+y^2}dx = -\arctan(x^2/y).$$

(b) Osserviamo che il potenziale determinato nel punto (a) è $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
Dato che

$$\nabla U(x,y) = -\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathbf{i} + \frac{x^2}{x^4+y^2}\mathbf{j}$$

si ha $\mathbf{F}(x,y) = \nabla U(x,y)$ quindi il campo $\mathbf{F}(x,y)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. (a) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x''(t)+2x'(t)+x(t)=0, \\ x(0)=1, \\ x'(0)=0. \end{cases}$

(b) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=2e^{-t}.$$

Soluzione:

(a) L'equazione caratteristica è $(\lambda+1)^2=0$. L'integrale generale risulta quindi essere

$$x(t)=(A+Bt)e^{-t}.$$

Calcolando la derivata prima della soluzione e imponendo le due condizioni $x(0)=1$, $x'(0)=0$ otteniamo

$$A=1, \qquad B=1$$

da cui si ha

$$x(t)=(1+t)e^{-t}.$$

(b) L'integrale generale della seconda equazione è dato dalla somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di un integrale particolare dell'equazione (b). Determiniamo quest'ultimo. Poichè l'unica radice dell'equazione caratteristica ha molteplicità $\mu=2$, cerchiamo una soluzione particolre del tipo $v(t)=Ct^2e^{-t}$. Derivando e sostituendo nell'equazione (b) troviamo $C=1$. Quindi l'integrale generale della (b) è dato da

$$y(t)=x(t)+v(t)=(A+Bt)e^{-t}+t^2e^{-t}.$$

Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**15 Luglio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & \alpha^2 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il nucleo dell'operatore lineare associato alla matrice $\mathbf{A}$.

Soluzione: $\det \mathbf{A} = 2\alpha^2 - 18$, dunque se $\alpha \neq \pm 3$ la matrice $\mathbf{A}$ è nonsingolare, e $\ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$; per $\alpha = \pm 3$, cioè $\alpha^2 = 9$, si ricava $y = -2z$, $x = 2y + z = -3z$, in definitiva

$$\alpha \neq \pm 3 \;\Rightarrow\; \ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\} \qquad\qquad \alpha = \pm 3 \;\Rightarrow\; \ker \mathbf{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 3k \\ 2k \\ -k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ove $\mathbf{b} = [\alpha - 2, -3, 2]^T$.

Soluzione: Se $\alpha \neq \pm 3$ il sistema ammette un'unica soluzione, se $\alpha = \pm 3$, la matrice completa è rispettivamente

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 6 & 9 & -3 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{(\alpha=3)} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -5 \\ -1 & 6 & 9 & -3 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{(\alpha=-3)}$$

– per $\alpha = 3$ $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ e il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un parametro,
– per $\alpha = -3$ $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.

c) Posto $\alpha = 2$, stabilire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ (giustificare la risposta).

Soluzione: Per $\alpha = 2$ la matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica, dunque è ortogonalmente diagonalizzabile, esiste pertanto una base ortogonale di autovettori di $\mathbf{A}$.

2. (a) Sia dato il campo vettoriale
$$\mathbf{G}(x,y,z) = 2yz\mathbf{i},$$
e la superficie S definita da
$$x(u,v) = uv, \quad y(u,v) = u^2, \quad z(u,v) = u+v, \quad \text{dove} \quad (u,v) \in D := [0,1]\times[0,1].$$
Calcolare, utilizzando il teorema di Stokes, il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{G}$ lungo il bordo $\partial^+ S$ di S.

(b) Stabilire se le seguenti serie numeriche
$$(I): \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{2^n(n^4+1)}, \qquad (II): \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^3+1},$$
sono convergenti.

Soluzione:

(a) Per il teorema di Stokes il lavoro $L_{\partial^+ S}(\mathbf{G})$ si ottiene tramite il seguente flusso
$$L_{\partial^+ S}(\mathbf{G}) = \int\!\!\int_S \operatorname{rot}\mathbf{G}\cdot\mathbf{N}dS.$$
L'integrale di superficie diventa:
$$\int\!\!\int_S \operatorname{rot}\mathbf{G}\cdot\mathbf{N}dS = \int\!\!\int_D \operatorname{rot}\mathbf{G}(u,v)\cdot P_u \wedge P_v du dv$$
dove
$$\operatorname{rot}\mathbf{G}(u,v) = 2u^2\mathbf{j} - 2(u+v)\mathbf{k}, \quad (u,v)\in D$$
$$P(u,v) = uv\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + (u+v)\mathbf{k}$$
$$P_u \wedge P_v = 2u\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} - 2u^2\mathbf{k}$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{G}(u,v)\cdot P_u\wedge P_v du dv = 2[3u^3 + u^2 v]du dv.$$
Quindi si ha
$$L_{\partial^+ S}(\mathbf{G}) = \int\!\!\int_S rot\mathbf{G}\cdot\mathbf{N}dS = 2\int_0^1 du\int_0^1 [3u^3+u^2v]dv = \frac{11}{6}.$$

(b) La serie (I) è convergente. Infatti osserviamo che è a termini positivi e che vale la stima
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{2^n(n^4+1)} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$
Per il criterio del confronto si deduce la convergenza dato che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ è convergente.
Lo stesso risultato si può ottenere anche in altri modi, ad esempio, con il criterio del rapporto.
La serie (II) non converge perchè il termine $\frac{n^3}{n^3+1}$ non tende a zero per n che tende all'infinito.

3. Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{4xy}{x^4+y^2}\mathbf{i} - \frac{2x^2}{x^4+y^2}\mathbf{j}.$$

(a) Giustificare il fatto che nel semipiano $y \geq 1/2$ il campo $\mathbf{F}$ ammette un potenziale e determinarlo.

(b) Verificare se il campo è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soluzione:

(a) Il campo $\mathbf{F}(x,y)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Il semipiano $y \geq 1/2$ è semplicemente connesso, non contiene l'origine ed il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale, non solo sul semipiano, ma in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y) = 0.$$

Quindi, nel semipiano $y \geq 1/2$, ammette un potenziale.
Prendiamo $P(0,1)$ che appartiene al semipiano $y \geq 1/2$. Un potenziale è dato da

$$U(x,y) = 2\int_0^x \frac{2xy}{x^4+y^2}dx = 2\arctan(x^2/y).$$

(b) Osserviamo che il potenziale determinato nel punto (a) è $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
Dato che

$$\nabla U(x,y) = \frac{4xy}{x^4+y^2}\mathbf{i} - \frac{2x^2}{x^4+y^2}\mathbf{j}$$

si ha $\mathbf{F}(x,y) = \nabla U(x,y)$ quindi il campo $\mathbf{F}(x,y)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. (a) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$

(b) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{2t}.$$

Soluzione:

(a) L'equazione caratteristica è $(\lambda - 2)^2 = 0$. L'integrale generale risulta quindi essere

$$x(t) = (A + Bt)e^{2t}.$$

Calcolando la derivata prima della soluzione e imponendo le due condizioni $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ otteniamo

$$A = 1, \qquad B = -2$$

da cui si ha

$$x(t) = (1 - 2t)e^{2t}.$$

(b) L'integrale generale della seconda equazione è dato dalla somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di un integrale particolare dell'equazione (b). Determiniamo quest'ultimo. Poichè l'unica radice dell'equazione caratteristica ha molteplicità $\mu = 2$, cerchiamo una soluzione particolre del tipo $v(t) = Ct^2e^{2t}$. Derivando e sostituendo nell'equazione (b) troviamo $C = 1$. Quindi l'integrale generale della (b) è dato da

$$y(t) = x(t) + v(t) = (A + Bt)e^{2t} + t^2e^{2t}.$$

Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**15 Luglio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & 4 \\ -2 & \alpha^2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il nucleo dell'operatore lineare associato alla matrice $\mathbf{A}$.

Soluzione: $\det \mathbf{A} = 2\alpha^2 - 18$, dunque se $\alpha \neq \pm 3$ la matrice $\mathbf{A}$ è nonsingolare, e $\ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$; per $\alpha = \pm 3$, cioè $\alpha^2 = 9$, si ricava $y = -2z$, $x = 6y + 4z = -8z$, in definitiva

$$\alpha \neq \pm 3 \;\Rightarrow\; \ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\} \qquad\qquad \alpha = \pm 3 \;\Rightarrow\; \ker \mathbf{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 8k \\ 2k \\ -k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ove $\mathbf{b} = [\alpha + 4, -1, 1]^T$.

Soluzione: Se $\alpha \neq \pm 3$ il sistema ammette un'unica soluzione, se $\alpha = \pm 3$, la matrice completa è rispettivamente

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 7 \\ -1 & 6 & 4 & -1 \\ -2 & 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{(\alpha=3)} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 6 & 4 & -1 \\ -2 & 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{(\alpha=-3)}$$

– per $\alpha = -3$ $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ e il sistema non ammette soluzione,
– per $\alpha = 3$ $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ e il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un parametro.

c) Posto $\alpha = -2$, stabilire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ (giustificare la risposta).

Soluzione: Per $\alpha = -2$ la matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica, dunque è ortogonalmente diagonalizzabile, esiste pertanto una base ortogonale di autovettori di $\mathbf{A}$.

2. (a) Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{G}(x,y,z) = -2yz\mathbf{i},$$

e la superficie S definita da

$$x(u,v) = uv, \quad y(u,v) = u^2, \quad z(u,v) = u+v, \quad \text{dove} \quad (u,v) \in D := [0,1] \times [0,1].$$

Calcolare, utilizzando il teorema di Stokes, il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{G}$ lungo il bordo $\partial^+ S$ di S.

(b) Stabilire se le seguenti serie numeriche

$$(I): \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n(n^5+1)}, \qquad (II): \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{n^4+1},$$

sono convergenti.

Soluzione:

(a) Per il teorema di Stokes il lavoro $L_{\partial^+ S}(\mathbf{G})$ si ottiene tramite il seguente flusso

$$L_{\partial^+ S}(\mathbf{G}) = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} dS.$$

L'integrale di superficie diventa:

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{G}(u,v) \cdot P_u \wedge P_v dudv$$

dove

$$\operatorname{rot} \mathbf{G}(u,v) = -2u^2\mathbf{j} + 2(u+v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D$$
$$P(u,v) = uv\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + (u+v)\mathbf{k}$$
$$P_u \wedge P_v = 2u\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} - 2u^2\mathbf{k}$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{G}(u,v) \cdot P_u \wedge P_v dudv = -2[3u^3 + u^2 v] dudv.$$

Quindi si ha

$$L_{\partial^+ S}(\mathbf{G}) = \iint_S rot\mathbf{G} \cdot \mathbf{N} dS = -2 \int_0^1 du \int_0^1 [3u^3 + u^2 v] dv = -\frac{11}{6}.$$

(b) La serie (I) è convergente. Infatti osserviamo che è a termini positivi e che vale la stima

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n(n^5+1)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Per il criterio del confronto si deduce la convergenza dato che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ è convergente. Lo stesso risultato si può ottenere anche in altri modi, ad esempio, con il criterio del rapporto.

La serie (II) non converge perchè il termine $\frac{n^4}{n^4+1}$ non tende a zero per n che tende all'infinito.

3. Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{4xy}{x^4+y^2}\mathbf{i} + \frac{2x^2}{x^4+y^2}\mathbf{j}.$$

(a) Giustificare il fatto che nel semipiano $y \geq 1/2$ il campo $\mathbf{F}$ ammette un potenziale e determinarlo.

(b) Verificare se il campo è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soluzione:

(a) Il campo $\mathbf{F}(x,y)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Il semipiano $y \geq 1/2$ è semplicemente connesso, non contiene l'origine ed il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale, non solo sul semipiano, ma in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,y) = 0.$$

Quindi, nel semipiano $y \geq 1/2$, ammette un potenziale.
Prendiamo $P(0,1)$ che appartiene al semipiano $y \geq 1/2$. Un potenziale è dato da

$$U(x,y) = -2\int_0^x \frac{2xy}{x^4+y^2}dx = -2\arctan(x^2/y).$$

(b) Osserviamo che il potenziale determinato nel punto (a) è $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
Dato che

$$\nabla U(x,y) = -\frac{4xy}{x^4+y^2}\mathbf{i} + \frac{2x^2}{x^4+y^2}\mathbf{j}$$

si ha $\mathbf{F}(x,y) = \nabla U(x,y)$ quindi il campo $\mathbf{F}(x,y)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. (a) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$

(b) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{-2t}.$$

Soluzione:

(a) L'equazione caratteristica è $(\lambda + 2)^2 = 0$. L'integrale generale risulta quindi essere

$$x(t) = (A + Bt)e^{-2t}.$$

Calcolando la derivata prima della soluzione e imponendo le due condizioni $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ otteniamo

$$A = 1, \qquad B = 2$$

da cui si ha

$$x(t) = (1 + 2t)e^{-2t}.$$

(b) L'integrale generale della seconda equazione è dato dalla somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di un integrale particolare dell'equazione (b). Determiniamo quest'ultimo. Poichè l'unica radice dell'equazione caratteristica ha molteplicità $\mu = 2$, cerchiamo una soluzione particolre del tipo $v(t) = Ct^2e^{-2t}$. Derivando e sostituendo nell'equazione (b) troviamo $C = 1$. Quindi l'integrale generale della (b) è dato da

$$y(t) = x(t) + v(t) = (A + Bt)e^{-2t} + t^2e^{-2t}.$$