Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **15 Febbraio 2010** **Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Si consideri l'equazione
$$z^4 + 2z = 0,$$
nel campo complesso $\mathbb{C}$.

   (a) Scrivere tutte le soluzioni nella forma $a + ib$.

   (b) Sia $\widehat{z}$ la soluzione che verifica
$$\mathbf{Re}(\widehat{z}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Im}(\widehat{z}) < 0.$$
   Calcolare
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\mathbf{Re}(\widehat{z})}{\mathbf{Im}(\widehat{z})}\right|^n + 1\right).$$

Motivare le risposte, riportando i calcoli:
Riscriviamo l'equazione come
$$z(z^3 + 2) = 0,$$
e annulliamo separatamente ciascuno dei due fattori. Per il primo chiaramente si ha $z = 0$, per il secondo indicate con z_k (k=0,1,2) le radici terze di -2, si ha
$$z_k = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2.$$
Quindi
$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right], \qquad z_1 = -\sqrt[3]{2}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{2}\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$
La soluzione $\widehat{z}$ che verifica
$$\mathbf{Re}(\widehat{z}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Im}(\widehat{z}) < 0,$$
è
$$\widehat{z} = \sqrt[3]{2}\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$
Si ha $|\mathbf{Re}(\widehat{z})/\mathbf{Im}(\widehat{z})| = 1/\sqrt{3}$, e quindi
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\mathbf{Re}(\widehat{z})}{\mathbf{Im}(\widehat{z})}\right|^n + 1\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + 1\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x| + 4}{x - 4}\right).$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Dominio di f: $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Limiti agli estremi: Esplicitando,

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{-x+4}{x-4}\right) = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} & \text{se } x < 0, \\ \arctan\left(\dfrac{x+4}{x-4}\right) & \text{se } x \geq 0 \quad \text{e } x \neq 4 \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Eventuali asintoti: Le rette $y = -\pi/4$ e $y = \pi/4$ sono asintoti orizzontali.

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ -\dfrac{4}{x^2+16} & \text{se } x > 0 \text{ e } x \neq 4, \end{cases}$$

Discutere la derivabilità di f: In $x = 0$, dove f è continua, si ha

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = 0 \neq \lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{4}.$$

Dunque f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{4, 0\}$.

Studio del segno di f: f è strettamente descrescente in $[0, 4)$ e in $(4, +\infty)$ e decrescente (non in senso stretto) in $(-\infty, 0)$. (Attenzione: dire che f è strettamente descrescente in $[0, 4) \cup (4, +\infty)$ è un errore, infatti, ad esempio, $f(1/2) \not> f(5)$).

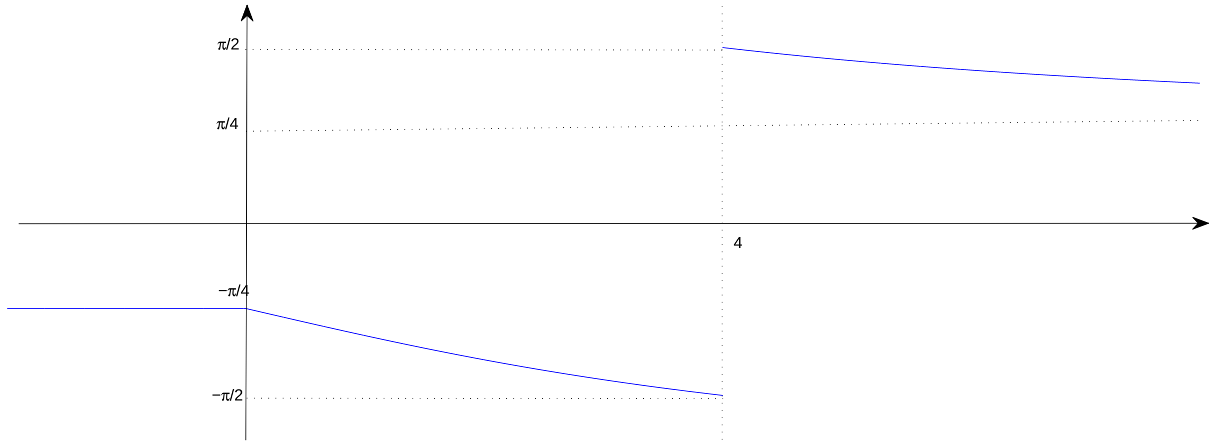
Si dica se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI:
Si ha $\inf f = -\pi/2$ e $\sup f = \pi/2$, e non esistono punti di massimo o minimo assoluti.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 2\dfrac{4x}{(x^2+16)^2} & \text{se } x > 0 \text{ e } x \neq 4, \end{cases}$$

Studio della convessità e della concavità :
$f''(x) > 0$ per ogni $x > 0, x \neq 4$, dunque f è convessa in $[0, 4)$ e $(4, +\infty)$.

Grafico di f:



π/2
π/4
4
−π/4
−π/2

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y'(x) = 25e^{1-5x} - 5y(x), \qquad y(0) = 0.$$

(a) Calcolare la soluzione $y(x)$.

(b) Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 3 di $y(x)$.

Giustificare le risposte, riportando i calcoli.

Dobbiamo risolvere un problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale linerare del primo ordine completa. Applicando la formula risolutiva si ottiene

$$y(x) = e^{-5x} \int_0^x 25e^{1-5t} \mathrm{dt} = 25xe^{1-5x}.$$

Il polinomio di MacLaurin di ordine 3 di $y(x)$ è dato da

$$5^2ex - 5^3ex^2 + \frac{5^4}{2}ex^3.$$

4. Data la curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 1 - \cos(t) + (2-t)\sin(t) \\ y(t) = \sin(t) + (2-t)\cos(t) \\ z(t) = \frac{1}{2}(2-t)^2 \end{cases} \qquad t \in [-2, 2].$$

(a) Calcolare la lunghezza di γ.

(b) Calcolare i vettori tangente, normale e binormale nel punto $P_0 = (0, 2, 2)$.

(c) Calcolare le equazioni del piano individuato dai vettori tangente e binormale nel punto P_0.

Motivare le risposte, riportando i calcoli:
Si ha

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = (2-t)\cos(t) \\ y'(t) = -(2-t)\sin(t) \\ z'(t) = -(2-t) \end{cases} \qquad t \in [-2, 2],$$

e quindi la lunghezza della curva γ è data da

$$L(\gamma) = \int_{-2}^{2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \int_{-2}^{2} \sqrt{2(2-t)^2} = \sqrt{2}\int_{-2}^{2}(2-t) = 2 * \sqrt{2} * 2^2.$$

Il punto P_0 corrisponde al valore $t = 0$ del parametro: $\gamma(0) = P_0$. Quindi il vettore tangente a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{T} = \gamma'(0) = (2, 0, -2).$$

Inoltre, si ha

$$\gamma''(t) = \begin{cases} x''(t) = -\cos(t) - (2-t)\sin(t) \\ y''(t) = \sin(t) - (2-t)\cos(t) \\ z''(t) = 1 \end{cases} \qquad t \in [-2, 2].$$

Quindi $\gamma''(0) = (-1, -2, 1)$, e il vettore normale a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{N} = \gamma''(0) - (\mathbf{T} \cdot \gamma''(0))\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Il vettore binormale a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Infine, il piano indivituato dai vettori tangente e binormale nel punto P_0 corrisponde al piano passante per P_0 e ortogonale al vettore $\mathbf{N}$. Quindi, l'equazione del piano è

$$7x - 2(y-2) - 7(z-2) = 0.$$

Domanda di teoria

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **15 Febbraio 2010** **Compito B**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Si consideri l'equazione
$$z^4 + 3z = 0,$$
nel campo complesso $\mathbb{C}$.

   (a) Scrivere tutte le soluzioni nella forma $a + ib$.

   (b) Sia $\widehat{z}$ la soluzione che verifica
$$\mathbf{Re}(\widehat{z}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Im}(\widehat{z}) < 0.$$
   Calcolare
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3}\left(\left|\frac{\mathbf{Re}(\widehat{z})}{\mathbf{Im}(\widehat{z})}\right|^n + 1\right).$$

Motivare le risposte, riportando i calcoli:
Riscriviamo l'equazione come
$$z(z^3 + 3) = 0,$$
e annulliamo separatamente ciascuno dei due fattori. Per il primo chiaramente si ha $z = 0$, per il secondo indicate con z_k (k=0,1,2) le radici terze di -3, si ha
$$z_k = \sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2.$$
Quindi
$$z_0 = \sqrt[3]{3}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right], \qquad z_1 = -\sqrt[3]{3}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{3}\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$
La soluzione $\widehat{z}$ che verifica
$$\mathbf{Re}(\widehat{z}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Im}(\widehat{z}) < 0,$$
è
$$\widehat{z} = \sqrt[3]{3}\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$
Si ha $|\mathbf{Re}(\widehat{z})/\mathbf{Im}(\widehat{z})| = 1/\sqrt{3}$, e quindi
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3}\left(\left|\frac{\mathbf{Re}(\widehat{z})}{\mathbf{Im}(\widehat{z})}\right|^n + 1\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + 1\right) = \frac{1}{3}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x| + 5}{x - 5}\right).$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Dominio di f: $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Limiti agli estremi: Esplicitando,

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{-x+5}{x-5}\right) = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} & \text{se } x < 0, \\ \arctan\left(\dfrac{x+5}{x-5}\right) & \text{se } x \geq 0 \quad \text{e } x \neq 5 \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Eventuali asintoti: Le rette $y = -\pi/4$ e $y = \pi/4$ sono asintoti orizzontali.

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ -\dfrac{5}{x^2 + 5^2} & \text{se } x > 0 \text{ e } x \neq 5, \end{cases}$$

Discutere la derivabilità di f: In $x = 0$, dove f è continua, si ha

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = 0 \neq \lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{5}.$$

Dunque f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{5, 0\}$.

Studio del segno di f: f è strettamente descrescente in $[0, 5)$ e in $(5, +\infty)$ e decrescente (non in senso stretto) in $(-\infty, 0)$. (Attenzione: dire che f è strettamente descrescente in $[0, 5) \cup (5, +\infty)$ è un errore, infatti, ad esempio, $f(1/2) \not> f(6)$).

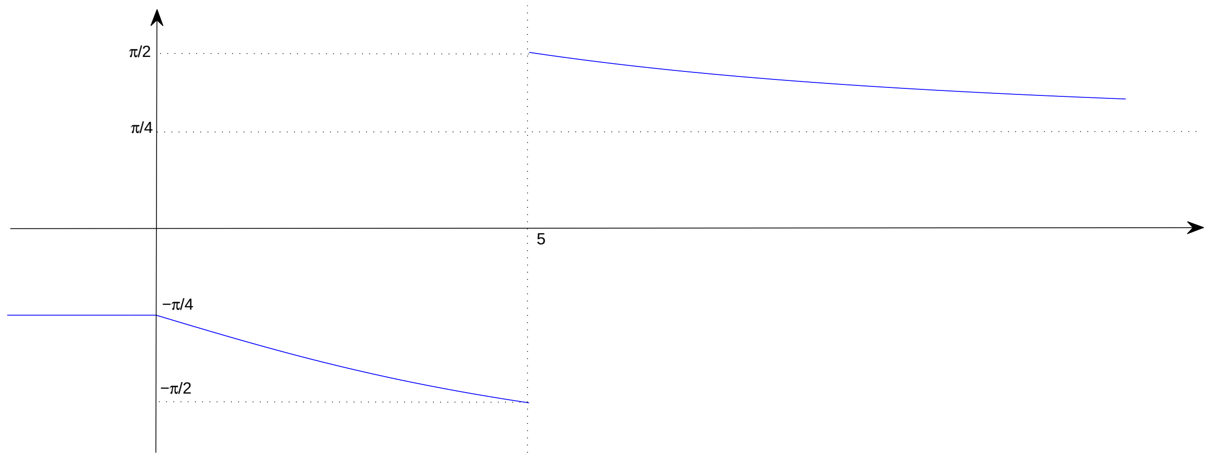
Si dica se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI:
Si ha $\inf f = -\pi/2$ e $\sup f = \pi/2$, e non esistono punti di massimo o minimo assoluti.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 2\dfrac{5x}{(x^2 + 5^2)^2} & \text{se } x > 0 \text{ e } x \neq 5, \end{cases}$$

Studio della convessità e della concavità :
$f''(x) > 0$ per ogni $x > 0, x \neq 5$, dunque f è convessa in $[0, 5)$ e $(5, +\infty)$.

Grafico di f:


π/2
π/4
5
−π/4
−π/2

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y'(x) = 16e^{1-4x} - 4y(x), \qquad y(0) = 0.$$

(a) Calcolare la soluzione $y(x)$.

(b) Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 3 di $y(x)$.

Giustificare le risposte, riportando i calcoli.

Dobbiamo risolvere un problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale linerare del primo ordine completa. Applicando la formula risolutiva si ottiene

$$y(x) = e^{-4x} \int_0^x 16e^{1-4t}\mathrm{dt} = 16xe^{1-4x}.$$

Il polinomio di MacLaurin di ordine 3 di $y(x)$ è dato da

$$4^2ex - 4^3ex^2 + \frac{4^4}{2}ex^3.$$

4. Data la curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 1 - \cos(t) + (4-t)\sin(t) \\ y(t) = \sin(t) + (4-t)\cos(t) \\ z(t) = \dfrac{1}{2}(4-t)^2 \end{cases} \qquad t \in [-4, 4].$$

(a) Calcolare la lunghezza di γ.

(b) Calcolare i vettori tangente, normale e binormale nel punto $P_0 = (0, 4, 8)$.

(c) Calcolare le equazioni del piano individuato dai vettori tangente e binormale nel punto P_0.

Motivare le risposte, riportando i calcoli:
Si ha

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = (4-t)\cos(t) \\ y'(t) = -(4-t)\sin(t) \\ z'(t) = -(4-t) \end{cases} \qquad t \in [-4, 4],$$

e quindi la lunghezza della curva γ è data da

$$L(\gamma) = \int_{-4}^{4} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \int_{-4}^{4} \sqrt{2(4-t)^2} = \sqrt{2}\int_{-4}^{4} (4-t) = 2 * \sqrt{2} * 4^2.$$

Il punto P_0 corrisponde al valore $t = 0$ del parametro: $\gamma(0) = P_0$. Quindi il vettore tangente a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{T} = \gamma'(0) = (4, 0, -4).$$

Inoltre, si ha

$$\gamma''(t) = \begin{cases} x''(t) = -\cos(t) - (4-t)\sin(t) \\ y''(t) = \sin(t) - (4-t)\cos(t) \\ z''(t) = 1 \end{cases} \qquad t \in [-4, 4].$$

Quindi $\gamma''(0) = (-1, -4, 1)$, e il vettore normale a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{N} = \gamma''(0) - (\mathbf{T} \cdot \gamma''(0))\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ -4 \\ -31 \end{pmatrix}.$$

Il vettore binormale a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Infine, il piano indivituato dai vettori tangente e binormale nel punto P_0 corrisponde al piano passante per P_0 e ortogonale al vettore $\mathbf{N}$. Quindi, l'equazione del piano è

$$(31)x - 4(y-4) + (-31)(z-8) = 0.$$

Domanda di teoria

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **15 Febbraio 2010** **Compito C**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Si consideri l'equazione

$$z^4 + 4z = 0,$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) Scrivere tutte le soluzioni nella forma $a + ib$.

(b) Sia $\widehat{z}$ la soluzione che verifica

$$\mathbf{Re}(\widehat{z}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Im}(\widehat{z}) < 0.$$

Calcolare

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\left| \frac{\mathbf{Re}(\widehat{z})}{\mathbf{Im}(\widehat{z})} \right|^n + 1 \right).$$

Motivare le risposte, riportando i calcoli:
Riscriviamo l'equazione come

$$z(z^3 + 4) = 0,$$

e annulliamo separatamente ciascuno dei due fattori. Per il primo chiaramente si ha $z = 0$, per il secondo indicate con z_k (k=0,1,2) le radici terze di -4, si ha

$$z_k = \sqrt[3]{4} \left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \right], \qquad k = 0, 1, 2.$$

Quindi

$$z_0 = \sqrt[3]{4} \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right], \qquad z_1 = -\sqrt[3]{4}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{4} \left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right],$$

La soluzione $\widehat{z}$ che verifica

$$\mathbf{Re}(\widehat{z}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Im}(\widehat{z}) < 0,$$

è

$$\widehat{z} = \sqrt[3]{4} \left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

Si ha $|\mathbf{Re}(\widehat{z})/\mathbf{Im}(\widehat{z})| = 1/\sqrt{3}$, e quindi

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\left| \frac{\mathbf{Re}(\widehat{z})}{\mathbf{Im}(\widehat{z})} \right|^n + 1 \right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n + 1 \right) = K.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|+2}{x-2}\right).$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Dominio di f: $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Limiti agli estremi: Esplicitando,

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{-x+2}{x-2}\right) = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} & \text{se } x < 0, \\ \arctan\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right) & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \neq 2, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Eventuali asintoti: Le rette $y = -\pi/4$ e $y = \pi/4$ sono asintoti orizzontali.

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ -\dfrac{2}{x^2+4} & \text{se } x > 0 \text{ e } x \neq 2, \end{cases}$$

Discutere la derivabilità di f: In $x = 0$, dove f è continua, si ha

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = 0 \neq \lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}.$$

Dunque f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{2, 0\}$.

Studio del segno di f: f è strettamente descrescente in $[0, 2)$ e in $(2, +\infty)$ e decrescente (non in senso stretto) in $(-\infty, 0)$. (Attenzione: dire che f è strettamente descrescente in $[0, 2) \cup (2, +\infty)$ è un errore, infatti, ad esempio, $f(1/2) \not> f(3)$).

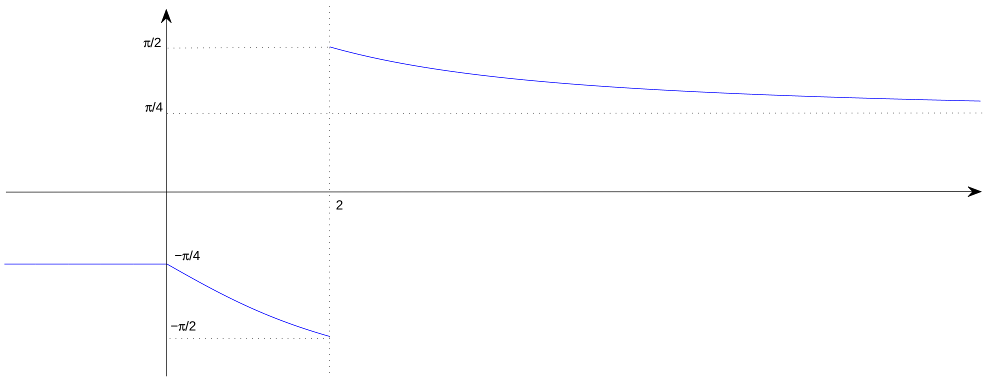
Si dica se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI:
Si ha $\inf f = -\pi/2$ e $\sup f = \pi/2$, e non esistono punti di massimo o minimo assoluti.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 2\dfrac{2x}{(x^2+4)^2} & \text{se } x > 0 \text{ e } x \neq 2, \end{cases}$$

Studio della convessità e della concavità :
$f''(x) > 0$ per ogni $x > 0, x \neq 2$, dunque f è convessa in $[0, 2)$ e $(2, +\infty)$.

Grafico di f:



π/2
π/4
2
−π/4
−π/2

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y'(x) = 9e^{1-3x} - 3y(x), \qquad y(0) = 0.$$

   (a) Calcolare la soluzione $y(x)$.

   (b) Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 3 di $y(x)$.

   Giustificare le risposte, riportando i calcoli.

   Dobbiamo risolvere un problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale linerare del primo ordine completa. Applicando la formula risolutiva si ottiene

$$y(x) = e^{-3x} \int_0^x 9e^{1-3t}\mathrm{dt} = 9xe^{1-3x}.$$

   Il polinomio di MacLaurin di ordine 3 di $y(x)$ è dato da

$$3^2ex - 3^3ex^2 + \frac{3^4}{2}ex^3.$$

4. Data la curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 1 - \cos(t) + (6-t)\sin(t) \\ y(t) = \sin(t) + (6-t)\cos(t) \\ z(t) = \dfrac{1}{2}(6-t)^2 \end{cases} \qquad t \in [-6, 6].$$

(a) Calcolare la lunghezza di γ.

(b) Calcolare i vettori tangente, normale e binormale nel punto $P_0 = (0, 6, 18)$.

(c) Calcolare le equazioni del piano individuato dai vettori tangente e binormale nel punto P_0.

Motivare le risposte, riportando i calcoli:
Si ha

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = (6-t)\cos(t) \\ y'(t) = -(6-t)\sin(t) \\ z'(t) = -(6-t) \end{cases} \qquad t \in [-6, 6],$$

e quindi la lunghezza della curva γ è data da

$$L(\gamma) = \int_{-6}^{6} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \int_{-6}^{6} \sqrt{2(6-t)^2} = \sqrt{2}\int_{-6}^{6} (6-t) = 2 * \sqrt{2} * 6^2.$$

Il punto P_0 corrisponde al valore $t = 0$ del parametro: $\gamma(0) = P_0$. Quindi il vettore tangente a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{T} = \gamma'(0) = (6, 0, -6).$$

Inoltre, si ha

$$\gamma''(t) = \begin{cases} x''(t) = -\cos(t) - (6-t)\sin(t) \\ y''(t) = \sin(t) - (6-t)\cos(t) \\ z''(t) = 1 \end{cases} \qquad t \in [-6, 6].$$

Quindi $\gamma''(0) = (-1, -6, 1)$, e il vettore normale a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{N} = \gamma''(0) - (\mathbf{T} \cdot \gamma''(0))\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ -6 \\ -71 \end{pmatrix}.$$

Il vettore binormale a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -36 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix}.$$

Infine, il piano indivituato dai vettori tangente e binormale nel punto P_0 corrisponde al piano passante per P_0 e ortogonale al vettore $\mathbf{N}$. Quindi, l'equazione del piano è

$$(71)x - 6(y-6) + (-71)(z-18) = 0.$$

Domanda di teoria

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **15 Febbraio 2010** **Compito D**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Si consideri l'equazione

$$z^4 + 5z = 0,$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) Scrivere tutte le soluzioni nella forma $a + ib$.

(b) Sia $\widehat{z}$ la soluzione che verifica

$$\mathbf{Re}(\widehat{z}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Im}(\widehat{z}) < 0.$$

Calcolare

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{5}\left(\left|\frac{\mathbf{Re}(\widehat{z})}{\mathbf{Im}(\widehat{z})}\right|^n + 1\right).$$

Motivare le risposte, riportando i calcoli:
Riscriviamo l'equazione come

$$z(z^3 + 5) = 0,$$

e annulliamo separatamente ciascuno dei due fattori. Per il primo chiaramente si ha $z = 0$, per il secondo indicate con z_k (k=0,1,2) le radici terze di -5, si ha

$$z_k = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2.$$

Quindi

$$z_0 = \sqrt[3]{5}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right], \qquad z_1 = -\sqrt[3]{5}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{5}\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

La soluzione $\widehat{z}$ che verifica

$$\mathbf{Re}(\widehat{z}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Im}(\widehat{z}) < 0,$$

è

$$\widehat{z} = \sqrt[3]{5}\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

Si ha $|\mathbf{Re}(\widehat{z})/\mathbf{Im}(\widehat{z})| = 1/\sqrt{3}$, e quindi

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{5}\left(\left|\frac{\mathbf{Re}(\widehat{z})}{\mathbf{Im}(\widehat{z})}\right|^n + 1\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + 1\right) = \frac{1}{5}.$$

2. Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|+1}{x-1}\right).$$
Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Dominio di f: $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Limiti agli estremi: Esplicitando,

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{-x+1}{x-1}\right) = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} & \text{se } x < 0, \\ \arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \neq 1, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Eventuali asintoti: Le rette $y = -\pi/4$ e $y = \pi/4$ sono asintoti orizzontali.

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ -\dfrac{1}{x^2+1} & \text{se } x > 0 \text{ e } x \neq 1, \end{cases}$$

Discutere la derivabilità di f: In $x = 0$, dove f è continua, si ha

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = 0 \neq \lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{1}.$$

Dunque f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1, 0\}$.

Studio del segno di f: f è strettamente descrescente in $[0, 1)$ e in $(1, +\infty)$ e decrescente (non in senso stretto) in $(-\infty, 0)$. (Attenzione: dire che f è strettamente descrescente in $[0, 1) \cup (1, +\infty)$ è un errore, infatti, ad esempio, $f(1/2) \not> f(2)$).

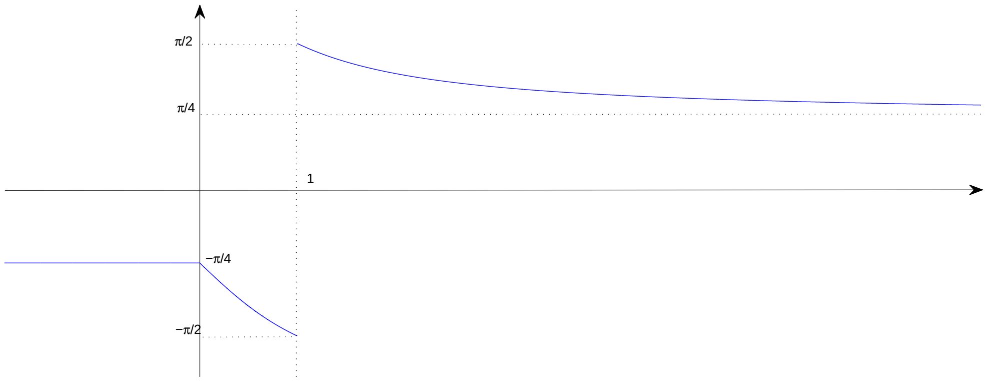
Si dica se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI:
Si ha $\inf f = -\pi/2$ e $\sup f = \pi/2$, e non esistono punti di massimo o minimo assoluti.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 2\dfrac{x}{(x^2+1)^2} & \text{se } x > 0 \text{ e } x \neq 1, \end{cases}$$

Studio della convessità e della concavità :
$f''(x) > 0$ per ogni $x > 0, x \neq 1$, dunque f è convessa in $[0, 1)$ e $(1, +\infty)$.

Grafico di f:



π/2
π/4
1
−π/4
−π/2

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y'(x) = 4e^{1-2x} - 2y(x), \qquad y(0) = 0.$$

   (a) Calcolare la soluzione $y(x)$.

   (b) Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 3 di $y(x)$.

   Giustificare le risposte, riportando i calcoli.

   Dobbiamo risolvere un problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale linerare del primo ordine completa. Applicando la formula risolutiva si ottiene

$$y(x) = e^{-2x} \int_0^x 4e^{1-2t} \mathrm{dt} = 4xe^{1-2x}.$$

   Il polinomio di MacLaurin di ordine 3 di $y(x)$ è dato da

$$2^2 ex - 2^3 ex^2 + \frac{2^4}{2} ex^3.$$

4. Data la curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 1 - \cos(t) + (8-t)\sin(t) \\ y(t) = \sin(t) + (8-t)\cos(t) \\ z(t) = \dfrac{1}{2}(8-t)^2 \end{cases} \qquad t \in [-8, 8].$$

   (a) Calcolare la lunghezza di γ

   (b) Calcolare i vettori tangente, normale e binormale nel punto $P_0 = (0, 8, 32)$.

   (c) Calcolare le equazioni del piano individuato dai vettori tangente e binormale nel punto P_0.

Motivare le risposte, riportando i calcoli:
Si ha

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = (8-t)\cos(t) \\ y'(t) = -(8-t)\sin(t) \\ z'(t) = -(8-t) \end{cases} \qquad t \in [-8, 8],$$

e quindi la lunghezza della curva γ è data da

$$L(\gamma) = \int_{-8}^{8} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \int_{-8}^{8} \sqrt{2(8-t)^2} = \sqrt{2}\int_{-8}^{8} (8-t) = 2 * \sqrt{2} * 8^2.$$

Il punto P_0 corrisponde al valore $t = 0$ del parametro: $\gamma(0) = P_0$. Quindi il vettore tangente a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{T} = \gamma'(0) = (8, 0, -8).$$

Inoltre, si ha

$$\gamma''(t) = \begin{cases} x''(t) = -\cos(t) - (8-t)\sin(t) \\ y''(t) = \sin(t) - (8-t)\cos(t) \\ z''(t) = 1 \end{cases} \qquad t \in [-8, 8].$$

Quindi $\gamma''(0) = (-1, -8, 1)$, e il vettore normale a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{N} = \gamma''(0) - (\mathbf{T} \cdot \gamma''(0))\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + 18 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127 \\ -8 \\ -127 \end{pmatrix}.$$

Il vettore binormale a γ nel punto P_0 è

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -64 \\ 0 \\ -64 \end{pmatrix}.$$

Infine, il piano indivituato dai vettori tangente e binormale nel punto P_0 corrisponde al piano passante per P_0 e ortogonale al vettore $\mathbf{N}$. Quindi, l'equazione del piano è

$$(127)x - 8(y - 8) + (-127)(z - 32) = 0.$$

Domanda di teoria