Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Primo appello** **13 luglio 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

SOLUZIONE DI UNO DEI COMPITI

1. a) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

si trovino, se possibile, una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ e una matrice diagonale $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$.

b) La funzione (forma quadratica)

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy + 9y^2 + 4yz + 2z^2$$

ha nell'origine $(0, 0, 0)$ un punto di massimo assoluto, di minimo assoluto o di sella? Giustificare la risposta.

Soluzione La matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica, perciò per il teorema spettrale esistono una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ e una matrice diagonale $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$. La matrice $\mathbf{D}$ ha sulla diagonale principale gli autovalori di $\mathbf{A}$, che sono le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 18 - 4) + 2(-2)(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 10)$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono perciò $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 10$.
L'autospazio relativo a $\lambda_1 = 1$ è la retta di equazioni

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

cioè $x - 2y = 2y + z = 0$. Un versore su questa retta è $[2/3, 1/3, -2/3]^T$.
L'autospazio relativo a $\lambda_2 = 2$ è la retta di equazioni

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

cioè $x - z = y = 0$. Un versore su questa retta è $[\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2]^T$.
L'autospazio relativo a $\lambda_3 = 10$ è la retta di equazioni

$$(\mathbf{A} - 10\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

cioè $4x + y = y - 4z = 0$. Un versore su questa retta è $\frac{\sqrt{2}}{6}[1, -4, -1]^T$.
Le due matrici

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

hanno le proprietà richieste.
Infine la forma quadratica in *b)* ha come matrice associata proprio la matrice $\mathbf{A}$. Siccome gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono positivi, $q(x, y, z) > 0$ per ogni $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, per cui l'origine è un punto di minimo assoluto per $q(x, y, z)$.

2. In $\mathbb{R}^3$, si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -xy\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{k}$$

Sia S la porzione della superficie di equazione

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 - x^2 - y^2\}$$

la cui proiezione sul piano x,y è il disco

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Si fissi su S una orientazione mediante un versore normale $\mathbf{n}$, in modo tale che nel punto $(0,0,3) \in S$ il versore $\mathbf{n}$ sia diretto come $\mathbf{k}$.

a) Enunciare il teorema di Stokes nello spazio.

b) Calcolare il flusso di rot $\mathbf{F}$ attraverso la superficie S , orientata con il versore normale $\mathbf{n}$ fissato.

c) Trovare l'area di S .

Soluzione

b) Facendo i conti, si trova:

$$\text{rot } \mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

Per il calcolo del flusso di rot $\mathbf{F}$ attraverso S , possiamo usare il teorema di Stokes. Per tale teorema, se $C = \partial S$ è il bordo orientato di S (con l'orientazione indotta da quella di S) e S' è una qualunque superficie (orientata) con lo stesso bordo orientato C , si ha

$$\Phi_S(\text{rot } \mathbf{F}) = \Phi_{S'}(\text{rot } \mathbf{F})$$

Scegliamo come S' il disco

$$S' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 2\}$$

L'orientazione giusta da fissare sul disco S' (se vogliamo che S' e $C = \partial S'$ siano coerentemente orientati) è quella data dal vettore

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} = (0,0,1)$$

Allora

$$\langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = \langle (x,-y,x), (0,0,1) \rangle = x$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\text{rot } \mathbf{F}) &= \Phi_{S'}(\text{rot } \mathbf{F}) \\
&= \int_{S'} \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, dS \\
&= \int_{S'} x \, dS \\
&= 0
\end{aligned}$$

(L'ultimo integrale è nullo per motivi di simmetria).

Si può calcolare il flusso di rot $\mathbf{F}$ attraverso S anche usando direttamente la definizione di flusso. Una parametrizzazione di S è

$$S : \mathbf{P}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (\alpha - u^2 - v^2)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D$$

Inoltre si ha:

$$\mathbf{n}dS = (\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v)dS = (2u\mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + \mathbf{k})dudv$$

$$\langle rot\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, dS = 2u^2 - 2v^2 + u.$$

Quindi

$$\Phi_S(rot\mathbf{F}) := \int_D (2u^2 - 2v^2 + u) dudv = 0.$$

Un terzo modo per calcolare lo stesso flusso consiste nell'usare il teorema di Stokes, calcolando l'integrale di $\mathbf{F}$ lungo il bordo $C = \partial S$:

$$\Phi_S(\text{rot } \mathbf{F}) = \int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{P} \rangle$$

Una parametrizzazione del bordo è

$$\mathbf{P}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \qquad\qquad 0 \le t \le 2\pi$$

e quindi

$$\mathbf{P}'(t) = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

La restrizione di $\mathbf{F}$ al bordo è

$$\mathbf{F}(t) = (-\cos t \sin t)\mathbf{i} + (\cos t \sin t)\mathbf{k}$$

Quindi, per il teorema di Stokes, il flusso $\Phi_S(\text{rot }\mathbf{F})$ è uguale a

$$\int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{P} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\mathbf{t}), \mathbf{P}'(\mathbf{t}) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \cos t \ \sin^2 t \ dt = 0.$$

c) L'area di S è data dall'integrale

$$\int_S dS$$

Ricordiamo che l'elemento d'area dS per una superficie S grafico di una funzione $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, è

$$\int_S dS = \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

Nel nostro caso,

$$\int_S dS = \int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$$

Conviene passare a coordinate polari:

$$\begin{aligned}
\int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, drd\vartheta \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{12} \left(1 + 4r^2\right)^{3/2} \Bigg|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{6} \cdot [5\sqrt{5} - 1]
\end{aligned}$$

3. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^6 \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua nell'origine;

b) Stabilire se f ammette derivate parziali prime nell'origine;

c) Stabilire se f è differenziabile nell'origine;

d) Supponiamo che una funzione sia differenziabile in un punto. Ciò garantisce che le derivate parziali prime, in tale punto, siano continue? Giustificare la risposta.

Soluzione

Per il calcolo dei limiti che seguono si utiliza il teorema del limite del prodotto di una funzione limitata per una infinitesima.

1) f è continua:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \rho^6 \cos^6\theta \sin\frac{1}{\rho^2} = 0 \ \ uniformemente\ risp.\ a\ \theta$$

2) f ammette le derivate parziali prime nell'origine:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0} h^5 \sin\frac{1}{h^2} = 0,$$

Analogamente

$$f_y(0,0) = 0$$

2) f è differenziabile. Verifichiamo che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Infatti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^6 \sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^6 \cos^6\theta \sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right)}{\rho} = 0 \ \ uniformemente\ risp.\ a\ \theta.$$