Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	T.	Totale

Analisi e Geometria 1 **COMPITO A**	**Docenti: P. Antonietti, F. Cipriani, F. Colombo, F. Lastaria, G. Mola, E. Munarini, P.Terenzi, C. Visigalli**	**13/07/2009** **Ing. Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi:

Es.1=6 punti, Es.2=12 punti, Es.3=6 punti, Es.4=6 punti.

Punteggio minimo per superare la prova=18 punti.

Informazioni importanti:

1) Si deve consegnare solo la presente scheda.

2) Durata della prova: 2h.

3) Svolgere in dettaglio sia gli esercizi che le dimostrazioni dei teoremi nei rispettivi riquadri.

4) Chi si ritira prima della fine dello scritto deve consegnare la scheda e la brutta copia.

5) Durante la prova scritta è consentito tenere soltanto le penne.

6) È vietato comunicare durante la prova scritta.

7) Ci si deve presentare alla prova scritta muniti di un documento d'identità.

8) La prova verrà annullata a chiunque contravverrà alle regole stabilite sopra.

---

1. Siano assegnati i punti $P(0,0,1)$ e $Q(1,2,4)$. Determinare:

   1) le equazioni parametriche della retta passante per P e per Q,

   2) l'equazione del piano passante per Q e ortogonale alla retta QP.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 - 2\arctan x^2.$$

Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

Dominio di f:
Limiti agli estremi del dominio:
Asintoti:
f'
Segno di f':
Punti di massimo e minimo:
f'':
Zeri di f'' e deduzione dei punti di flesso:

3. Data la linea Γ in forma parametrica $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dove

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^2 + \sin(t^2 - 1), \qquad t \in \mathbb{R},$$

determinare l'equazione del piano osculatore π_{osc} nel punto relativo a $t = 1$.

4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$I = \int \frac{e^x}{e^{x/2} + e^{x/3}} \, dx.$$

5. Dimostrare il teorema della permanenza del segno.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	T.	Totale

Analisi e Geometria 1 **COMPITO B**	**Docenti: P. Antonietti, F. Cipriani, F. Colombo, F. Lastaria, G. Mola, E. Munarini, P.Terenzi, C. Visigalli**	**13/07/2009** **Ing. Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi:

Es.1=6 punti, Es.2=12 punti, Es.3=6 punti, Es.4=6 punti.

Punteggio minimo per superare la prova=18 punti.

Informazioni importanti:

1) Si deve consegnare solo la presente scheda.

2) Durata della prova: 2h.

3) Svolgere in dettaglio sia gli esercizi che le dimostrazioni dei teoremi nei rispettivi riquadri.

4) Chi si ritira prima della fine dello scritto deve consegnare la scheda e la brutta copia.

5) Durante la prova scritta è consentito tenere soltanto le penne.

6) È vietato comunicare durante la prova scritta.

7) Ci si deve presentare alla prova scritta muniti di un documento d'identità.

8) La prova verrà annullata a chiunque contravverrà alle regole stabilite sopra.

---

1. Siano assegnati i punti $P(0,0,1)$ e $Q(1,2,5)$. Determinare:

   1) le equazioni parametriche della retta passante per P e per Q,

   2) l'equazione del piano passante per Q e ortogonale alla retta QP.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = 2 \arctan x^2 - x^2$$

Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

Dominio di f:
Limiti agli estremi del dominio:
Asintoti:
f'
Segno di f':
Punti di massimo e minimo:
f'':
Zeri di f'' e deduzione dei punti di flesso:

3. Data la linea Γ in forma parametrica $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dove

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2 + \sin(t^2 - 1), \qquad t \in \mathbb{R},$$

determinare l'equazione del piano osculatore π_{osc} nel punto relativo a $t = 1$.

4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$I = \int \frac{e^x}{e^{x/2} - e^{x/3}}\, dx.$$

5. Dimostrare il teorema di Rolle.

SOLUZIONI

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	T.	Totale

Analisi e Geometria 1 **COMPITO A**	**Docenti: P. Antonietti, F. Cipriani, F. Colombo, F. Lastaria, G. Mola, E. Munarini, P.Terenzi, C. Visigalli**	**13/07/2009** **Ing. Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi:

Es.1=6 punti, Es.2=12 punti, Es.3=6 punti, Es.4=6 punti.

Punteggio minimo per superare la prova=18 punti.

Informazioni importanti:

1) Si deve consegnare solo la presente scheda.

2) Durata della prova: 2h.

3) Svolgere in dettaglio sia gli esercizi che le dimostrazioni dei teoremi nei rispettivi riquadri.

4) Chi si ritira prima della fine dello scritto deve consegnare la scheda e la brutta copia.

5) Durante la prova scritta è consentito tenere soltanto le penne.

6) È vietato comunicare durante la prova scritta.

7) Ci si deve presentare alla prova scritta muniti di un documento d'identità.

8) La prova verrà annullata a chiunque contravverrà alle regole stabilite sopra.

---

1. Siano assegnati i punti $P(0,0,1)$ e $Q(1,2,4)$. Determinare:

   1) le equazioni parametriche della retta passante per P e per Q,

   2) l'equazione del piano passante per Q e ortogonale alla retta QP.

   Soluzione

   I parametri direttori della retta r_{PQ} sono: $a = 1 - 0 = 1$, $b = 2 - 0 = 2$, $c = 4 - 1 = 3$ quindi r_{PQ}:

   $$x(t) = x_Q + at = 1 + t, \qquad y(t) = y_Q + bt = 2 + 2t, \qquad z(t) = z_Q + ct = 4 + 3t.$$

   Il piano ortogonale è dato da

   $$a(x - x_Q) + b(y - y_Q) + c(z - z_Q) = 0 \quad da \;\; cui \;\; 1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-4) = 0.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 - 2 \arctan x^2$$

Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

Dominio di f: Dominio di f=$\mathbb{R}$, Simmetria: f è pari.

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Asintoti: NON ESISTONO dato che $f \sim x^2$ per $x \to \pm\infty$

$$f'(x) = 2x \, \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$$

Segno di f':

$$f'(x) \geq 0 \quad \textit{se e solo se} \; -1 \leq x \leq 0 \;\; \textit{e} \quad 1 \geq x.$$

Punti di massimo e minimo:

$$x_{min} = -1, \quad x_{max} = 0, \quad x_{min} = 1.$$

$$f'' = 2 \, \frac{x^8 + 8x^4 - 1}{(x^4 + 1)^2}$$

Zeri di f'' e deduzione dei punti di flesso:

$$x^8 + 8x^4 - 1 = 0, \qquad x_F = \pm \sqrt[4]{\sqrt{17} - 4}$$

compatibili con i max e min.

3. Data la linea Γ in forma parametrica $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dove

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^2 + \sin(t^2 - 1), \qquad t \in \mathbb{R},$$

determinare l'equazione del piano osculatore π_{osc} nel punto relativo a $t = 1$.

Soluzione

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = 2t, \quad z'(t) = 2t + 2t\cos(t^2 - 1)$$

$$x''(t) = 0, \quad y''(t) = 2, \quad z''(t) = 2 + 2\cos(t^2 - 1) - 4t^2 \sin(t^2 - 1),$$

da cui si ottiene

$$P(1) = (1, 1, 1), \qquad P'(1) = (1, 2, 4), \qquad P''(1) = (0, 2, 4),$$

il piano π_{osc} è

$$2y - z - 1 = 0.$$

4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$I = \int \frac{e^x}{e^{x/2} + e^{x/3}}\ dx.$$

Soluzione

Poniamo $e^x = t^6$ da cui si ha $e^x dx = 6t^5 dt$.

$$I = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2}\ dt = 6 \int \frac{t^3+1}{t+1} - \frac{1}{t+1}\ dt$$

$$= 6[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t] - 6 \ln[t+1] + C, \quad dove \quad t = e^{x/6}.$$

5. Dimostrare il teorema della permanenza del segno.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	T.	Totale

Analisi e Geometria 1 **COMPITO B**	**Docenti: P. Antonietti, F. Cipriani, F. Colombo, F. Lastaria, G. Mola, E. Munarini, P.Terenzi, C. Visigalli**	**13/07/2009** **Ing. Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi:

Es.1=6 punti, Es.2=12 punti, Es.3=6 punti, Es.4=6 punti.

Punteggio minimo per superare la prova=18 punti.

Informazioni importanti:

1) Si deve consegnare solo la presente scheda.

2) Durata della prova: 2h.

3) Svolgere in dettaglio sia gli esercizi che le dimostrazioni dei teoremi nei rispettivi riquadri.

4) Chi si ritira prima della fine dello scritto deve consegnare la scheda e la brutta copia.

5) Durante la prova scritta è consentito tenere soltanto le penne.

6) È vietato comunicare durante la prova scritta.

7) Ci si deve presentare alla prova scritta muniti di un documento d'identità.

8) La prova verrà annullata a chiunque contravverrà alle regole stabilite sopra.

---

1. Siano assegnati i punti $P(0,0,1)$ e $Q(1,2,5)$. Determinare:

   1) le equazioni parametriche della retta passante per P e per Q,

   2) l'equazione del piano passante per Q e ortogonale alla retta QP.

   Soluzione

   I parametri direttori della retta r_{PQ} sono: $a = 1-0 = 1$, $b = 2-0 = 2$, $c = 5-1 = 4$ quindi r_{PQ}:

$$x(t) = x_Q + at = 1+t, \qquad y(t) = y_Q + bt = 2+2t, \qquad z(t) = z_Q + ct = 4+4t.$$

   Il piano ortogonale è dato da

$$a(x-x_Q) + b(y-y_Q) + c(z-z_Q) = 0 \quad da \;\; cui \;\; 1(x-1) + 2(y-2) + 4(z-4) = 0.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = 2\arctan x^2 - x^2$$

Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

Dominio di f: Dominio di f=$\mathbb{R}$, Simmetria: f è pari.

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty.$$

Asintoti: NON ESISTONO dato che $f \sim -x^2$ per $x \to \pm\infty$

$$f'(x) = -2x\ \frac{x^4-1}{x^4+1}$$

Segno di f':

$$f'(x) \le 0 \quad \textit{se e solo se} \ -1 \le x \le 0 \ \ \textit{e} \quad 1 \ge x.$$

Punti di massimo e minimo:

$$x_{max} = -1, \quad x_{min} = 0, \quad x_{max} = 1.$$

$$f'' = -2\ \frac{x^8 + 8x^4 - 1}{(x^4+1)^2}$$

Zeri di f'' e deduzione dei punti di flesso:

$$x^8 + 8x^4 - 1 = 0, \qquad x_F = \pm\sqrt[4]{\sqrt{17} - 4}$$

compatibili con i max e min.

3. Data la linea Γ in forma parametrica $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dove

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2 + \sin(t^2 - 1), \qquad t \in \mathbb{R},$$

determinare l'equazione del piano osculatore π_{osc} nel punto relativo a $t = 1$.

Soluzione

$$x'(t) = 2t, \quad y'(t) = 1, \quad z'(t) = 2t + 2t\cos(t^2 - 1)$$

$$x''(t) = 2, \quad y''(t) = 0, \quad z''(t) = 2 + 2\cos(t^2 - 1) - 4t^2 \sin(t^2 - 1),$$

da cui si ottiene

$$P(1) = (1, 1, 1), \qquad P'(1) = (2, 1, 4), \qquad P''(1) = (2, 0, 4),$$

il piano π_{osc} è

$$2x - z - 1 = 0.$$

4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$I = \int \frac{e^x}{e^{x/2} - e^{x/3}} \; dx.$$

Soluzione

Poniamo $e^x = t^6$ da cui si ha $e^x dx = 6t^5 dt$.

$$I = \int \frac{6t^5}{t^3 - t^2} \; dt = 6 \int \frac{t^3 - 1}{t - 1} + \frac{1}{t - 1} \; dt$$

$$= 6[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t] + 6 \ln |t - 1| + C, \quad dove \quad t = e^{x/6}.$$

5. Dimostrare il teorema di Rolle.