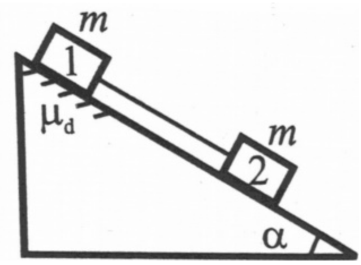
POLITECNICO DI MILANO
Fondamenti di Fisica Sperimentale, a. a. 2015-16
I appello, 12 luglio 2016

Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. Scrivere in stampatello nome, cognome, matricola e firmare ogni foglio.

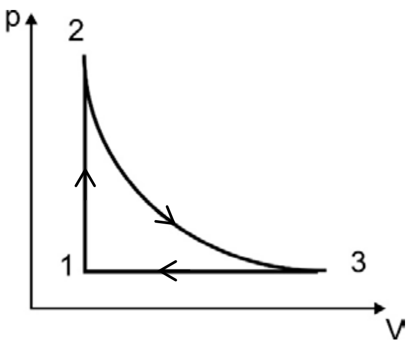
Esercizio 1
Due corpi di massa *m*, legati da una fune inestensibile e priva di massa, scivolano lungo un piano inclinato di un angolo α (vedi figura). Tra il piano e il corpo 2 non c'è attrito, mentre tra il piano ed il corpo 1 il coefficiente di attrito dinamico è μ_d.



1) Si determini il valore di α per il quale le due masse si muovono con moto uniforme;

2) per tale valore di α si calcoli il valore della tensione della fune.

Esercizio 2
Una macchina termica compie il ciclo descritto in figura con 0.2 moli di gas ideale biatomico. Sapendo che la trasformazione 2-3 è adiabatica, la 3-1 isobara e la 1-2 isocora e che T_1=300 K, p_1=1 atm, T_2=600 K, calcolare:



1) pressione e volume nei punti 1, 2 e 3;

2) calore scambiato, lavoro compiuto e variazione di energia interna del gas per ognuna delle tre trasformazioni;

3) il lavoro complessivo svolto in un ciclo dalla macchina.

Esercizio 3
Si consideri un cilindro metallico di lunghezza infinita e raggio *a* sulla cui superficie sia presente una densità superficiale di carica $\sigma>0$. Una particella di carica negativa *-q* e massa *m* percorre un'orbita circolare di raggio $r_0 > a$ concentrica al cilindro. Si determini:

1) Il campo elettrico **E** generato in tutto lo spazio dal cilindro carico.

2) Il potenziale corrispondente in tutto lo spazio, assumendo nullo il potenziale a distanza *r=a* dall'asse del cilindro.

3) L'energia cinetica e l'energia potenziale della particella.

Esercizio 4
Si enunci e si dimostri la legge di Ampère in forma integrale.

Fondamenti di Fisica Sperimentale

Primo appello - 12/07/2016 - **Soluzioni sintetiche**

Esercizio 1

1) Scelto un sistema di assi cartesiani con l'asse x diretto lungo il piano verso il basso e l'asse y perpendicolare al piano diretto verso l'alto, per i due oggetti risulteranno le seguenti scomposizioni dell'equazione di moto.
Per il corpo 1:

$$\begin{cases} N_1 - mg\cos\alpha = 0 \\ \\ T + mg\sin\alpha - f_a = ma \end{cases} \tag{1}$$

mentre per il corpo 2:

$$\begin{cases} N_2 - mg\cos\alpha = 0 \\ \\ mg\sin\alpha - T = ma \end{cases} \tag{2}$$

dove N_1 ed N_2 sono i moduli delle reazioni vincolari agenti sugli oggetti, $f_a = \mu_d N_1 = \mu_d mg\cos\alpha$ è il modulo della forza di attrito dinamico, T è il modulo della tensione; si è assunto che le masse si muovano alla stessa accelerazione in quanto la fune è ideale. Determinando il valore della tensione dalle equazioni per il corpo 2 e sustituendolo in quella per il corpo 1 si ottiene:

$$2mg\sin\alpha - \mu_d mgcos\alpha = 2ma \tag{3}$$

da cui, imponendo che il moto sia uniforme e dunque che l'accelerazione sia nulla, si ottiene

$$\tan\alpha = \frac{\mu_d}{2} \tag{4}$$

2) Il valore della tensione corrispondente all'angolo così determinato sarà poi pari a:

$$T = mg\sin\alpha - ma = mg\sin\alpha = mg\sin\left[\mathrm{atan}\left(\frac{\mu_d}{2}\right)\right] \tag{5}$$

ovvero, tenuto conto della relazione $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

$$T = \frac{\mu_d mg}{\sqrt{4+\mu_d^2}} \tag{6}$$

Esercizio 2

1) Ricordiamo che 1 atm = 1.013 bar = 1.013×10^5 Pa; inoltre, essendo il gas biatomico, i calori molari risultano pari a $c_V = \frac{5}{2}R$ e $c_p = \frac{7}{2}R$. Pertanto il volume nel punto 1 è pari a:

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 0.0049 \text{ m}^3 \tag{7}$$

sfruttando poi l'isocora 1-2 si ottiene che $V_2 = V_1$ e potremo calcolare la pressione nel punto 2, pari a:

$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{nRT_2}{V_1} = p_1\frac{T_2}{T_1} = 202600 \text{ Pa} \tag{8}$$

sfruttando infine l'adiabatica 2-3 e l'isobara 3-1 avremo che $p_3 = p_1$ e dunque:

$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma = p_1 V_3^\gamma \tag{9}$$

essendo $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{7}{5}$. Otterremo quindi:

$$p_1 V_3^\gamma = \left(p_1 \frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{nRT_1}{p_1}\right)^\gamma \tag{10}$$

da cui

$$V_3 = \frac{nRT_1}{p_1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0.0081 \text{ m}^3 \tag{11}$$

ed inoltre, con facili calcoli basati sull'equazione di stato,

$$T_3 = T_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 492.2 \text{ K}. \tag{12}$$

2) Per le varie trasformazioni si ottengono i seguenti risultati:

Isocora 1-2: $\mathcal{L}_{12} = 0$; $\mathcal{Q}_{12} = \Delta U_{12} = nc_V(T_2 - T_1) = 1246$ J.

Adiabatica 2-3: $\mathcal{Q}_{23} = 0$; $\Delta U_{23} = -\mathcal{L}_{23} = nc_V(T_3 - T_2) = -448$ J.

Isobara 3-1: $\mathcal{Q}_{31} = nc_p(T_1 - T_3) = -1118$ J; $\mathcal{L}_{31} = p_1(V_1 - V_3) = -319$ J; $\Delta U_{31} = nc_V(T_1 - T_3) = -798$ J.

3) Risulta infine che il lavoro compiuto in un ciclo sarà pari a $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{23} + \mathcal{L}_{31} = nc_V(T_2 - T_3) - p_1(V_3 - V_1) = 129$ J.

Esercizio 3

1) Distingueremo due regioni dello spazio; nella regione $r < a$ il campo elettrico è nullo in quanto la regione è occupata da un conduttore. Applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica Σ coassiale al cilindro carico e di raggio $r > a$ ed altezza generica h e tenendo conto che il campo elettrico avrà simmetria cilindrica del tipo $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$, otterremo

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \int_\Sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 2\pi r h E(r) = \frac{Q_\Sigma}{\varepsilon_0} \tag{13}$$

dove la carica contenuta all'interno della superficie gaussiana sarà pari a $Q_\Sigma = 2\pi a h \sigma$. Pertanto otterremo che:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & r < a \\ \\ \dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0 r}\mathbf{u}_r & r > a \end{cases} \tag{14}$$

2) Detto P un punto generico dello spazio e P_0 un punto in cui il potenziale sia posto pari a zero, avremo che

$$V(P) = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} \tag{15}$$

calcolato su un qualunque percorso che congiunga P a P_0. Scelto un percorso radiale, potremo quindi porre $\mathbf{dr} = dr\mathbf{u}_r$ e dunque otterremo per tutti i punti a distanza dall'asse $r \geq a$:

$$V(r) = \int_r^a E(r)dr = \int_r^a \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r}dr = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{r}\right) = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right) \tag{16}$$

mentre per i punti a distanza $r \leq a$ si avrà semplicemente $V(r) = 0$.

3) Poiché la carica negativa si muove di moto circolare uniforme, potremo determinare la sua energia cinetica imponendo che la forza elettrica funga da forza centripeta:

$$qE(r_0) = \frac{q\sigma a}{\varepsilon_0 r_0} = m\frac{v^2}{r_0} \tag{17}$$

da cui è facile calcolare l'energia cinetica, pari a:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q\sigma a}{2\varepsilon_0} \tag{18}$$

mentre l'energia potenziale della particella sarà pari a:

$$U = -qV(r_0) = \frac{q\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{a}\right) \tag{19}$$

Esercizio 4

Si veda ad esempio S. Focardi, I. Massa, A. Uguzzoni *Fisica Generale, Elettromagnetismo* cap. 5, pag. 181 e seguenti oppure P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, *Elementi di Fisica, Meccanica - Elettromagnetismo* II edizione, cap. 7, pag. 177 e seguenti.