

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria
-------	-------	-------	-------	--------	--------

Analisi e Geometria 1 12 Luglio 2010		Compito A	Docente:	Politecnico di Milano Ingegneria Industriale
Cognome:		Nome:		Matricola:

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.

Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Calcolare, al variare del parametro reale α , il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \arctan x}{(e^{-x} - 1 + x)^\alpha}.$$

SOLUZIONE

Si noti che, utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin opportuni, possiamo dedurre le relazioni di asintoticità

$$\sin x - \arctan x \sim x - \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{6}$$

e

$$e^{-x} - 1 + x \sim \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 1 + x = \frac{x^2}{2}$$

per $x \rightarrow 0$. Di conseguenza, tornando al limite, abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \arctan x}{(e^{-x} - 1 + x)^\alpha} = \frac{2^\alpha}{6} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3-2\alpha} = \begin{cases} 0^+, & \text{se } \alpha < \frac{3}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{3}, & \text{se } \alpha = \frac{3}{2}, \\ +\infty, & \text{se } \alpha > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Dominio di f : $D(f) = [-2, 2]$. Si osservi che la funzione è dispari, restringiamo quindi lo studio all'intervallo $[0, 2]$.
Limiti agli estremi: $f(0) = f(2) = 0$
Eventuali asintoti: Nessun asintoto.
Derivata prima: $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$
Discutere la derivabilità di f : $D(f') = [0, 2)$. Inoltre, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -\infty$.
Studio del segno di f : $f > 0$ in $(0, 2)$, $f(0) = f(2) = 0$.
Si dica se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI: f ha un punto di massimo assoluto in $x = \sqrt{2}$.
Derivata seconda: $f''(x) = \frac{x(x^2 - 6)}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} \quad x \in [0, 2)$
Studio della convessità e della concavità: $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 2)$ e $f''(0) = 0$. Quindi f è concava in $(0, 2)$ e $x = 0$ è un punto di flesso per f .
Grafico di f :

3. Si consideri l'equazione differenziale, dipendente dal parametro reale k ,

$$y'(t) = -3ty(t) + kt.$$

(a) Determinare la soluzione che si annulla nell'origine.

(b) Determinare k in modo che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} = 1.$$

Giustificare le risposte, riportando i calcoli.

SOLUZIONE

Si tratta di un'equazione differenziale lineare e si ottiene facilmente l'integrale generale

$$\begin{aligned} y &= e^{-3 \int t dt} \int e^{3 \int t dt} kt dt \\ &= \frac{k}{3} + ce^{-\frac{3}{2}t^2} \end{aligned} \quad c \in \mathbb{R},$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ si ha

$$0 = \frac{k}{3} + c,$$

da cui $c = -k/3$. La soluzione cercata è quindi

$$y = \frac{k}{3} \left(1 - e^{-\frac{3}{2}t^2} \right).$$

Per calcolare il limite, si ricordi il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

e dunque

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k}{3} \left(\frac{1 - e^{-\frac{3}{2}t^2}}{t^2} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3}{2} * \frac{k}{3} \left(\frac{1 - e^{-\frac{3}{2}t^2}}{-\frac{3}{2}t^2} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k}{2} \left(\frac{e^{-\frac{3}{2}t^2} - 1}{\frac{3}{2}t^2} \right) = \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} = 1 \quad \iff \quad k = 2.$$

4. Studiare, al variare del parametro reale β , la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) \arctan x}{(2+x)^\beta} dx.$$

SOLUZIONE

Si noti preliminarmente che la funzione integranda è continua e positiva sul dominio di integrazione $(0, +\infty)$. Inoltre, non presenta singolarità per $x \rightarrow 0^+$. Di conseguenza è possibile applicare il criterio del confronto asintotico, e basta studiare il caso $x \rightarrow +\infty$. Utilizzando la relazione $(1+t)^\alpha \sim 1 + \alpha t$ per $t \rightarrow 0$ e per ogni α , abbiamo

$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1 \right] \sim x^{1/3} \left(1 + \frac{1}{3x} - 1\right) = \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Poichè valgono anche le (ovvie) relazioni

$$(2+x)^\beta \sim x^\beta \quad \text{e} \quad \arctan x \sim \frac{\pi}{2}$$

per $x \rightarrow +\infty$, deduciamo infine

$$\frac{(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) \arctan x}{(2+x)^\beta} \sim \frac{\pi}{6} x^{-2/3-\beta}$$

per $x \rightarrow +\infty$. Tale integrale converge se, e solo se, $\beta > \frac{1}{3}$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria
-------	-------	-------	-------	--------	--------

Analisi e Geometria 1 12 Luglio 2010		Compito B	Docente:	Politecnico di Milano Ingegneria Industriale
Cognome:		Nome:		Matricola:

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.

Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Calcolare, al variare del parametro reale α , il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1 - x)^\alpha}{\sin x - \arctan x}.$$

SOLUZIONE

Si noti che, utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin opportuni, possiamo dedurre le relazioni di asintoticità

$$e^x - 1 - x \sim \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - 1 - x = \frac{x^2}{2}$$

e

$$\sin x - \arctan x \sim x - \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{6}$$

per $x \rightarrow 0$. Di conseguenza, tornando al limite, abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1 - x)^\alpha}{\sin x - \arctan x} = \frac{6}{2^\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-3+2\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha < \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{\sqrt{2}}, & \text{se } \alpha = \frac{3}{2}, \\ 0^+, & \text{se } \alpha > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{3}x\sqrt{9-x^2}$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Dominio di f : $D(f) = [-3, 3]$. Si osservi che la funzione è dispari, restringiamo quindi lo studio all'intervallo $[0, 3]$.
Limiti agli estremi: $f(0) = f(3) = 0$
Eventuali asintoti: Nessun asintoto.
Derivata prima: $f'(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{3\sqrt{9-x^2}} = \frac{2x^2-9}{3\sqrt{9-x^2}}$
Discutere la derivabilità di f : $D(f') = [0, 3)$. Inoltre, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = +\infty$.
Studio del segno di f : $f < 0$ in $(0, 3)$, $f(0) = f(3) = 0$.
Si dica se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI: f ha un punto di minimo assoluto in $x = 3/\sqrt{2}$.
Derivata seconda: $f''(x) = \frac{x(27-2x^2)}{3(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} \quad x \in [0, 3)$
Studio della convessità e della concavità: $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 3)$ e $f''(0) = 0$. Quindi f è convessa in $(0, 3)$ e $x = 0$ è un punto di flesso per f .
Grafico di f :

3. Si consideri l'equazione differenziale, dipendente dal parametro reale k ,

$$y'(t) = -5ty(t) + kt.$$

(a) Determinare la soluzione che si annulla nell'origine.

(b) Determinare k in modo che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} = -1.$$

Giustificare le risposte, riportando i calcoli.

SOLUZIONE

Si tratta di un'equazione differenziale lineare e si ottiene facilmente l'integrale generale

$$\begin{aligned} y &= e^{-5 \int t dt} \int e^{5 \int t dt} kt dt \\ &= \frac{k}{5} + ce^{-\frac{5}{2}t^2} \end{aligned} \quad c \in \mathbb{R}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ si ha

$$0 = \frac{k}{5} + c,$$

da cui $c = -k/5$. La soluzione cercata è quindi

$$y = \frac{k}{5} \left(1 - e^{-\frac{5}{2}t^2} \right).$$

Per calcolare il limite, si ricordi il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

e dunque

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k}{5} \left(\frac{1 - e^{-\frac{5}{2}t^2}}{t^2} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5}{2} * \frac{k}{5} \left(\frac{1 - e^{-\frac{5}{2}t^2}}{-\frac{5}{2}t^2} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k}{2} \left(\frac{e^{-\frac{5}{2}t^2} - 1}{\frac{5}{2}t^2} \right) = \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} = -1 \quad \iff \quad k = -2.$$

4. Studiare, al variare del parametro reale β , la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}) \arctan x}{(3+x)^\beta} dx.$$

SOLUZIONE

Si noti preliminarmente che la funzione integranda è continua e positiva sul dominio di integrazione $(0, +\infty)$. Inoltre, non presenta singolarità per $x \rightarrow 0^+$. Di conseguenza è possibile applicare il criterio del confronto asintotico, e basta studiare il caso $x \rightarrow +\infty$. Utilizzando la relazione $(1+t)^\alpha \sim 1 + \alpha t$ per $t \rightarrow 0$ e per ogni α , abbiamo

$$\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[4]{x} = x^{1/4} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/4} - 1 \right] \sim x^{1/4} \left(1 + \frac{1}{4x} - 1\right) = \frac{1}{4} x^{-3/4}.$$

Poichè valgono anche le (ovvie) relazioni

$$(3+x)^\beta \sim x^\beta \quad \text{e} \quad \arctan x \sim \frac{\pi}{2}$$

per $x \rightarrow +\infty$, deduciamo infine

$$\frac{(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}) \arctan x}{(3+x)^\beta} \sim \frac{\pi}{8} x^{-3/4-\beta}$$

per $x \rightarrow +\infty$. Tale integrale converge se, e solo se, $\beta > \frac{1}{4}$.