ANALISI MATEMATICA II		
Allievi Gestionali	**Docenti: R. Notari, C. Perelli Cippo, F. Sianesi**	**11 settembre 2009**
Cognome:	Nome:	Matricola: N.iscriz.

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

1. Sia data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da: $L(x,y,z) = (2x+3y-z, 2x+5y-3z, x+2y-z)$.
i) Stabilire per quale valore di k il vettore $(1,3,k)$ appartiene all'immagine di L; ii) per il valore di k trovato determinare le controimmagini del vettore $(1,3,k)$.

i) $(1,3,k) \in Im(L)$ se il sistema $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 2x+5y-3z=3 \\ x+2y-z=k \end{cases}$ ha soluzioni

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & k \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = 4k-4$$

il sistema ha soluzioni se e solo se $k=1$

∞^1 soluzioni

ii) $\begin{cases} 2x+3y = 1+z \\ 2x+5y = 3+3z \\ x+2y = 1+z \end{cases}$

equivalente a $\begin{cases} 2x+3y = 1+z \\ 2x+5y = 3+3z \end{cases}$

$x = -1-z, \; y = 1+z$

$L^{-1}(1,3,k) = \{(-1-z, 1+z, z) : z \in \mathbb{R}\}$

2. i) Dare la definizione di derivata parziale per una funzione in due variabili in un punto. ii) Dare la definizione di differenziabilità per una funzione in due variabili in un punto e mostrare che se una funzione è differenziabile in un punto è continua in quel punto. iii) Calcolare, con la definizione, le derivate parziali nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione è differenzaibile nell'origine?

iii) $$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = 1$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - 1 \cdot (x-0) - 1\,(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3+y^3-x^3-xy^2-yx^2-y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} - \frac{\rho^3(\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta)}{\rho^3}$$

$= -(\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta)$ non esiste perché dipende da θ

f non è differenziabile in $(0,0)$

3. Stabilire per quale valore di y_0 l'equazione $e^{x^2y} + y - x = 0$ definisce implicitamente, in un intorno di $(0, y_0)$, una funzione $y = y(x)$ tale che $y(0) = y_0$. Disegnare un grafico di tale funzione in un intorno del punto $(0, y_0)$ per il valore di y_0 trovato.

$F(x,y) = e^{x^2y} + y - x$; $F(0, y_0) = 1 + y_0 = 0$

$y_0 = -1$, $F_x = 2xe^{x^2y} - 1$, $F_y = x^2e^{x^2y} + 1$

$F_x(0,-1) = -1$, $F_y(0,-1) = 1$

$y'(0) = -\frac{-1}{1} = 1$

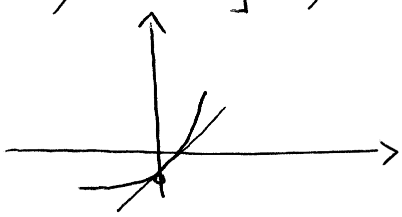
$e^{x^2y(x)} + y(x) - x \equiv 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}(0)$

$e^{x^2y(x)}[2xy(x) + x^2y'(x)] + y'(x) - 1 \equiv 0$

$e^{x^2y(x)}[2xy(x) + x^2y'(x)]^2 + e^{x^2y(x)}[2y(x) +$

$2xy'(x) + 2xy'(x) + x^2y''(x)] + y''(x) = 0$

$\Rightarrow y''(0) = 2$



4. Data l'equazione differenziale $y' = f(x)y^2$, determinare $f(x)$ in modo che l'equazione ammetta come soluzione la funzione $y = e^{-x}$. Determinare quindi l'integrale generale dell'equazione relativa alla funzione $f(x)$ trovata.

$y = e^{-x} \quad y' = -e^{-x}$

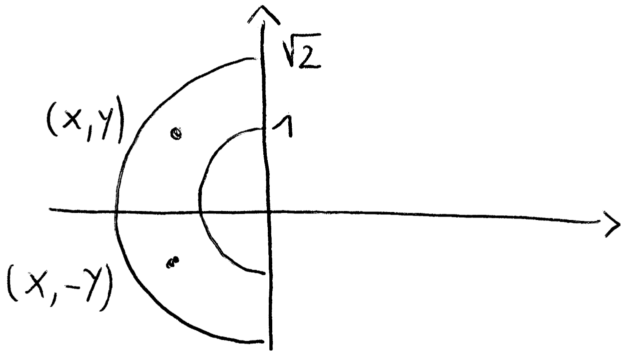
$-e^{-x} = f(x)e^{-2x} \Rightarrow f(x) = -\frac{e^{-x}}{e^{-2x}} = -e^{x}$

$y' = -e^{x}y^2$

$-\frac{y'}{y^2} = +e^{x} \qquad \int -\frac{dy}{y^2} = \int +e^{x}dx$

$\frac{1}{y} = e^{x} + c \qquad y = \frac{1}{e^{x}+c}$

5. Sia $D = \{(x,y) : x \leq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ un dominio piano. Calcolare $\iint_D x \, dxdy$ e $\iint_D y \, dxdy$.



$$\iint_D y \, dx \, dy = 0$$ perché la funzione $f(x,y) = y$ è tale che $f(x,-y) = -f(x,y)$

$$\iint_D x \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos\theta \, d\rho \right) d\theta$$

$$= \frac{\rho^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\theta \Big|_{\pi/2}^{3/2\,\pi}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} (-2)$$