Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo appello** **11 luglio 2011 Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 6 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 12 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Risolvere nel campo complesso la seguente equazione:

$$z^2 - z\,\overline{z} + 4 - i = 0 \tag{1}$$

Soluzione.

Posto $z = x + iy$, si ha $\overline{z} = x - iy$ e $z\overline{z} = x^2 + y^2$. Quindi l'equazione (1) si scrive:

$$x^2 + 2ixy - y^2 - x^2 - y^2 + 4 - i = 0$$

ossia

$$-2y^2 + 2ixy = -4 + i$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -2y^2 = -4 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Questo sistema ha due soluzioni:

$$(x_1, y_1) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2}), \qquad (x_2, y_2) = (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$$

Quindi le soluzioni dell'equazione (1) sono

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\sqrt{2}, \qquad z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - i\sqrt{2}$$

2. (a) Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali il seguente integrale generalizzato è convergente:

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+1}\, dx \tag{2}$$

(b) Calcolare il valore dell'integrale quando $a = 1$.

Soluzione.

(a) Per $a \leq 0$, la funzione integranda tende all'infinito per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge a $+\infty$. Se invece $a < 0$, si ha definitivamente (ad esempio)

$$e^{-ax^2+1} < \frac{1}{x^5}$$

ossia

$$x^3 e^{-ax^2+1} < \frac{1}{x^2}$$

Quindi, per il criterio del confronto, per ogni $a > 0$ l'integrale converge. Riassumendo: l'integrale (2) è convergente se e solo se $a > 0$.

(b) Con il metodo di integrazione per parti, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^{-x^2+1}\, dx &= \int -\frac{1}{2}x^2[(-2x)e^{-x^2+1}]\, dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2+1} - \int (-x)e^{-x^2+1} \\
&= -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2+1} - \frac{1}{2}e^{-x^2+1}
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2+1}\, dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x^3 e^{-x^2+1}\, dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \Big[-\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2+1} - \frac{1}{2}e^{-x^2+1} \Big]_0^b \\
&= \frac{1}{2}e
\end{aligned}$$

3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, denotiamo con r la retta che contiene i due punti $A = (2, -1, 3)$ e $B = (1, -1, 2)$.

   (a) Scrivere un'equazione cartesiana per il piano $\mathcal{P}$ contenente il punto A e ortogonale alla retta r.

   (b) Trovare le coordinate del punto $X_0 \in \mathcal{P}$ per il quale è minima la distanza dall'origine. Calcolare tale minima distanza.

Soluzione.

(a) Un vettore di direzione della retta r è $\mathbf{v} = A - B = (1, 0, 1)$. Un'equazione cartesiana per il piano $\mathcal{P}$, passante per A e ortogonale a r, è $1(x - 2) + 0(y + 1) + 1(z - 3) = 0$, ossia

$$x + z - 5 = 0$$

(b) Il punto $X_0 \in \mathcal{P}$ a distanza minima dall'origine è l'intersezione del piano $\mathcal{P}$ con la retta

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

costituita dai multipli del vettore $\mathbf{v} = A - B = (1, 0, 1)$. Sostituendo nell'equazione $x + z - 5 = 0$ del piano $\mathcal{P}$, si ottiene $t = \frac{5}{2}$ e quindi

$$X_0 = (5/2, 0, 5/2)$$

La distanza del punto $X_0 = (5/2, 0, 5/2)$ dall'origine è $5/\sqrt{2}$.

4. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 + \arctan x$$

definita su $\mathbb{R}$.

(a) Con un confronto grafico, si stabilisca in quanti punti la funzione f si annulla.

(b) Discutere l'esistenza di eventuali asintoti.

(c) Stabilire in quanti punti la funzione derivata f' si annulla, specificando se si tratta di punti di minimo, di massimo o di flesso.

(d) Scrivere il polinomio Taylor di f di ordine 2, centrato nell'origine.

(e) Disegnare qui sotto un grafico qualitativo di f:

Soluzione.

(a) La funzione $f(x) = x^2 + \arctan x$ si annulla quando $\arctan x = -x^2$. I grafici di $\arctan x$ e $-x^2$ si intersecano in due punti:

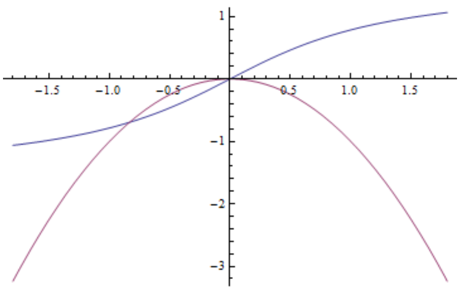

Figura 1: Grafici di $\arctan x$ e di $-x^2$.

Quindi la funzione $f(x) = x^2 + \arctan x$ si annulla in due punti: un punto $x_0 = \alpha$, con $\alpha < 0$, e $x_1 = 0$.

(b) Ovviamente non ci sono asintoti verticali. Dal momento che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali. Per vedere se ci sono asintoti obliqui, occorre anzitutto studiare i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \arctan x}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + \arctan x}{x} = -\infty,$$

Dunque, non ci sono asintoti obliqui. Alla stessa conclusione si giunge osservando che

$$x^2 + \arctan x \sim x^2$$

sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

Concludendo, la funzione f non ha asintoti.

(c) La funzione $f(x)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^3 + 2x + 1}{1 + x^2}$$

Poiché il numeratore $g(x) = 2x^3 + 2x + 1$ è un polinomio di terzo grado strettamente crescente ($g'(x) = 6x^2 + 2 > 0$), la derivata $f'(x)$ si annulla esattamente in un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, tale punto $\overline{x}$ deve essere un punto di minimo (assoluto).

(d) Il polinomio Taylor di f di ordine 2 centrato nell'origine (polinomio di MacLaurin) è

$$T_2(f) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 = x + x^2$$

(e) Il grafico di $f(x)$ è il seguente:

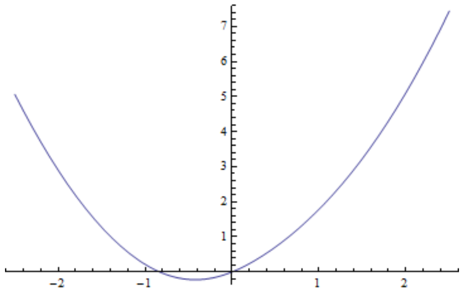

Figura 2: Grafico di $f(x) = x^2 + \arctan x$