Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Terzo appello** **10 Settembre 2012** **Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 10 punti; Es.3: 7 punti; Es.4: 7 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate***. *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità , sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Calcolare nel campo complesso le soluzioni dell'equazione $(z-3-3i)^3=-8$ e rappresentarle nel piano di Gauss.

   (b) Detto E l'insieme di tali soluzioni, rappresentare nel piano di Gauss (senza calcolarne esplicitamente gli elementi) l'insieme

$$A=\{\omega\in\mathbb{C}:\omega=\frac{1}{i}z, z\in E\}\,.$$

Poniamo $w=z-3-3i$ e risolviamo l'equazione $w^3=-8$. Poiché $-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$, risulta $w^3=-8$ se e solo se $|w|^3=8$ e $3\arg(w)=\pi+2k\pi$ (con k intero). Segue

$$|w|=2 \qquad e \qquad \arg(w)=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3} \quad (k=0,1,2)\,.$$

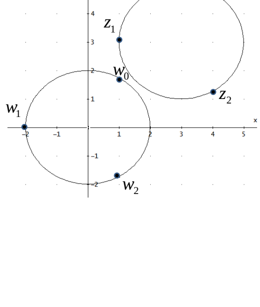
Si ottengono quindi le soluzioni

$$w_0=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=1+i\sqrt{3} \quad ; \quad w_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2 \quad ; \quad w_2=2(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi)=1-i\sqrt{3}\,,$$

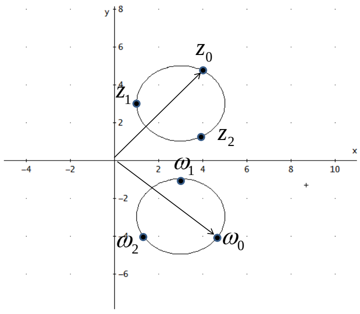
da cui si ricavano le soluzioni dell'equazione originaria:

$$z_0=3+3i+w_0=4+i(3+\sqrt{3}) \quad ; \quad z_1=3+3i+w_1=1+3i \quad ; \quad z_2=3+3i+w_2=4+i(3-\sqrt{3})\,.$$

Gli elementi z_k dell'insieme E (con $k=0,1,2$) si disegnano facilmente sia direttamente che traslando i rispettivi elementi w_k. Si trovano sulla circonferenza di centro $(3;3)$ e raggio 2.



Gli elementi dell'insieme A si ottengono dividendo per i gli elementi dell'insieme E. Geometricamente, ciò equivale a ruotare gli elementi dell'insieme E di novanta gradi **in senso orario** (perché la moltiplicazione per i è la rotazione di novanta gradi in senso antiorario).



2. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

Segno. Poiché si tratta di una radice cubica, $f(x)$ ha il segno di $x(x-1)^2$, per cui è negativa per $x < 0$, si annulla per $x = 0$ e per $x = 1$ mentre è positiva per tutti gli altri valori di x.

Asintoto obliquo. Per $x \to \pm\infty$, risulta $x(x-1)^2 \sim x^3$, per cui risulta $f(x) \sim x$. Segue $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Inoltre, sempre per $x \to \pm\infty$, risulta

$$f(x)-x \sim x\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) \sim x\left(\sqrt[3]{\frac{x(x-1)^2}{x^3}} - 1\right) \sim x\left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right) \sim \frac{x}{3}\left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \to -\frac{2}{3}\,.$$

Segue che il grafico della funzione f ammette la retta $y = x - \frac{2}{3}$ come asintoto (obliquo) a $\pm\infty$.

Derivata e derivabilità. Poiché

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2} = (x^3 - 2x^2 + x)^{1/3}\,,$$

nei punti in cui $f(x) \neq 0$ risulta

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt[3]{(x(x-1)^2)^2}}\,.$$

Notiamo che

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty\,.$$

Poiché f è continua in 0 (è continua in tutto $\mathbb{R}$), dal teorema sul limite della derivata segue che nel punto 0 la derivata esiste infinita. Il punto 0 è un punto di **flesso a tangente verticale**. Invece risulta

$$\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \pm\infty$$

rispettivamente. Poiché f è continua in 1, sempre per il teorema sul limite della derivata risulta $f'_-(1) = -\infty$ e $f'_+(1) = +\infty$, per cui nel punto 1 la derivata non esiste. Il punto 1 è un punto di **cuspide**. In 0 e 1 la funzione non è quindi derivabile.

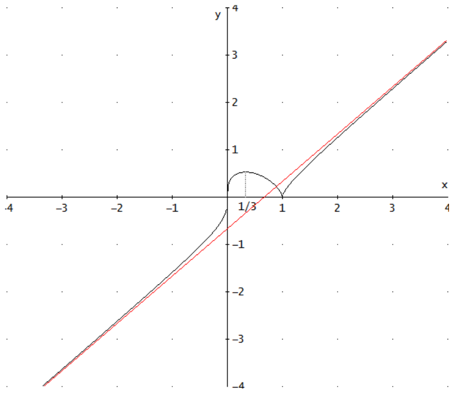
In tutti gli altri punti — come abbiamo visto — la derivata esiste finita e vale $\frac{1}{3}\frac{3x^2-4x+1}{\sqrt[3]{(x(x-1)^2)^2}}$.

Poiché il denominatore è sempre positivo, l'espressione precedente ha il segno di $3x^2 - 4x + 1$, che è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici $x = 1/3$ e $x = 1$, mentre è negativo per valori interni.

In conclusione, abbiamo che $f'(x)$ è:

positiva per $x < 1/3$ e per $x > 1$ (in 0 è uguale a $+\infty$), negativa per $1/3 < x < 1$ e nulla per $x = 1/3$, mentre per $x = 1$ non esiste. Il punto $1/3$ è un punto di **massimo relativo** per la funzione. Risulta $f(1/3) = \sqrt[3]{4}/3 \simeq 0,53$.

Grafico. Il minimo numero di flessi compatibile con i risultati ottenuti è 1 (a tangente verticale, in $x = 0$). Non è difficile, volendo, verificare che il grafico di f sta al di sopra dell'asintoto obliquo per $x < 8/9$ e sta al di sotto per $x > 8/9$.



3. Sia r la retta intersezione dei piani di equazioni $x - y + z = 0$ e $x - 2y - z = 1$.

   (a) Rappresentare r in forma parametrica.

   (b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che passa per il punto $P \equiv (1, -1, 2)$ ed è ortogonale a r.

   (c) Scrivere le equazioni delle due sfere di raggio $\sqrt{14}$ tangenti in P a π.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

rispetto alle incognite x e y e ponendo $z = t$, si ottiene la seguente possibile rappresentazione parametrica della retta r:

$$r : \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases} .$$

Un vettore direzionale della retta r è quindi il vettore $\mathbf{v} = (-3, -2, 1)$, per cui il piano π che passa per il punto $P \equiv (1, -1, 2)$ ortogonale a r è rappresentato dall'equazione $-3(x-1)-2(y+1)+(z-2) = 0$. Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\pi : \ -3x - 2y + z - 1 = 0 .$$

Dividendo il vettore $\mathbf{v}$ per il suo modulo si ottiene uno dei due versori (opposti) ortogonali al piano π. I due versori sono quindi

$$\mathbf{N}_1 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3, -2, 1) \qquad ; \qquad \mathbf{N}_2 = -\mathbf{N}_1 .$$

Posto $\mathbf{p} = (1, -1, 2)$ ($\mathbf{p}$ è il vettore-posizione del punto P), i due centri C_1 e C_2 delle sfere cercate sono individuati dai vettori-posizione

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{p} + \sqrt{14}\,\mathbf{N}_1 = \mathbf{p} + \mathbf{v} = (-2, -3, 3) \qquad ; \qquad \mathbf{c}_2 = \mathbf{p} + \sqrt{14}\,\mathbf{N}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{v} = (4, 1, 1) .$$

Le due sfere sono quindi rappresentate dalle equazioni

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 14 \qquad ; \qquad (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 14 .$$

4. Calcolare i due seguenti integrali definiti.

$$\text{(a)} \quad \int_e^{e^2} \frac{\ln x + 3}{x\left(\ln^2 x + 3\ln x + 2\right)}\, dx \quad ; \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\pi} e^{2x} \sin x \, dx \quad .$$

Osservazione. Entrambe le funzioni sono definite e continue nei rispettivi intervalli di integrazione (estremi compresi).

a)

Con la sostituzione $\ln x = t$ $(x = e^t)$ ci si riconduce al calcolo dell'integrale

$$\int_1^2 \frac{t+3}{t^2+3t+2}\, dt \, .$$

Poiché t^2+3t+2 ha come radici -1 e -2, risulta $t^2+3t+2 = (t+1)(t+2)$. La funzione integranda si può quindi scrivere come $\dfrac{A}{t+1} + \dfrac{B}{t+2}$. Con semplici calcoli si ottiene $A = 2$ e $B = -1$. Segue

$$\int_1^2 \frac{t+3}{t^2+3t+2}\, dt = \int_1^2 \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right) dt = \left|2\ln(t+1) - \ln(t+2)\right|_1^2 =$$

$$= 2\ln 3 - \ln 4 - 2\ln 2 + \ln 3 = 3\ln 3 - 2\ln 4 = \ln \frac{27}{16} \simeq 0,523 \, .$$

b)

Integrando due volte per parti si ottiene

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x \, dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\, dx \, .$$

Segue

$$5\int e^{2x}\sin x = e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C \, ,$$

da cui si ottiene

$$\int e^{2x}\sin x = \frac{e^{2x}(2\sin x - \cos x)}{5} + c \, .$$

Di conseguenza, risulta

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\sin x \, dx = \left|\frac{e^{2x}(2\sin x - \cos x)}{5}\right|_0^{\pi} = \frac{e^{2\pi}+1}{5} \simeq 107,3 \, .$$