Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo Appello** **9 Luglio 2014**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 10 punti; Es.2: 6 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità , sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+1} & \text{se } x \leq 0, x \neq -1 \\ \\ x^3 \ln 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) stabilire se la funzione è continua in tutto il suo dominio; b) stabilire se la funzione è derivabile in tutto il suo dominio; c) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e scrivere l'equazione di eventuali asintoti; d) determinare gli eventuali punti di massimo e/o di minimo e di flesso; e) disegnare il grafico della funzione indicando il numero minimo di flessi compatibile con le informazioni raccolte precedentemente.

Soluzione:

a) La funzione è continua nel suo dominio, infatti è continua se $x \neq 0$, e poiché $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln 2x = 0 = f(0)$, f risulta continua anche in $x = 0$.

b) La funzione è derivabile in tutto il suo dominio;

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} & \text{se } x < 0, \quad x \neq -1 \\ \\ 3x^2 \ln 2x + x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

In $x = 0$ la derivata vale 0, infatti $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2 \ln 2x + x^2 = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0$.

c) La funzione ha un asintoto obliquo per $x \to -\infty$ avente equazione $y = x - 1$, infatti si ha che $f(x) \sim x$ per $x \to -\infty$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - x \right) = -1$; e un asintoto verticale di equazione $x = -1$.

d) Studiando il segno della derivata prima: $3x^2 \ln 2x + x^2 \geq 0$ se $x \geq \dfrac{1}{2\sqrt[3]{e}}$; $\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} \geq 0$ se $x \leq -2$; si trova un punto di massimo relativo in $x = -2$ e un punto di minimo relativo in $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{e}}$. In $x = 0$ c'è un punto di flesso a tangente orizzontale.

2. Stabilire per quali valori del parametro reale α converge il seguente integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{\alpha x}-1)x}{\sqrt[3]{x}(x^3+x^2)^{1-\alpha}}$$

Soluzione:
Se $\alpha = 0$ la funzione integranda $f(x)$ è nulla quindi integrabile. Se $\alpha \neq 0$ e $x \to 0^+$, si ha che $f(x) \sim \dfrac{\alpha x^2}{\sqrt[3]{x}(x^2)^{1-\alpha}} = \dfrac{\alpha}{x^{\frac{1}{3}-2\alpha}}$. Quindi $f(x)$ è integrabile in un intorno dell'origine se $\alpha > -\dfrac{1}{3}$.
Se $x \to +\infty$, si ha che: se $\alpha > 0$ $f(x)$ è un infinito, quindi non integrabile, mentre se $\alpha < 0$ $f(x)$ è asintotica a $-\dfrac{1}{x^{\frac{7}{3}-3\alpha}}$, e poiché $\dfrac{7}{3} - 3\alpha > 1$ è integrabile.
Allora l'integrale converge se $-\dfrac{1}{3} < \alpha \leq 0$.

3. Data l'equazione differenziale $y' + 2y\cos x - \cos x = 0$, a) trovare l'integrale generale; b) trovare la soluzione che passa per il punto $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$; c) scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado centrato in $x = \frac{\pi}{4}$ della soluzione trovata al punto b) e disegnare un grafico locale di tale soluzione in un intorno di $x = \frac{\pi}{4}$.

Soluzione:

a) L'integrale generale è $y(x) = e^{-2\sin x}\left(\frac{1}{2}e^{2\sin x} + c\right)$

b) La soluzione richiesta è $y(x) = e^{-2\sin x}\left(\frac{1}{2}e^{2\sin x} + \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}\right)$.

c) Si ha che: $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$; $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4}y(\frac{\pi}{4}) + \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $y''(x) + 2y'(x)\cos x + 2y(-\sin x) + \sin x = 0$ da cui $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Quindi il polinomio di Taylor è $P(x) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$.

4. Data la curva parametrica di equazione $\underline{r}(t) = \frac{t^2}{2}\underline{i} + t\underline{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{t^3}\underline{k}$, con $t \geq 0$; a) determinare i versori della terna intrinseca nel punto $P = (\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2}}{3})$; b) scrivere le equazioni della retta tangente alla curva in P e della retta appartenente al piano osculatore normale alla curva in P; c) trovare un punto A appartenente alla curva in modo che l'arco di curva di estremi O e A abbia lunghezza 4.

Soluzione:

a) $\underline{r}'(t) = t\underline{i} + \underline{j} + \sqrt{2}\sqrt{t}\underline{k}$, $\underline{r}'(1) = \underline{i} + \underline{j} + \sqrt{2}\underline{k}$, $\underline{T}(1) = \frac{1}{2}\underline{i} + \frac{1}{2}\underline{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{k}$.

$\underline{r}''(1) = \underline{i} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\underline{k}$, $\underline{B}(1) = \frac{\underline{r}'(1) \times \underline{r}''(1)}{|\underline{r}'(1) \times \underline{r}''(1)|} = \frac{1}{2}\underline{i} + \frac{1}{2}\underline{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{k}$.

$\underline{N}(1) = \underline{B}(1) \times \underline{T}(1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\underline{i} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\underline{j}$.

b) L'equazione della retta tangente è $x = \frac{1}{2} + t$, $y = 1 + t$, $z = \frac{2}{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}t$; l'equazione della retta normale è $x = \frac{1}{2} + t$, $y = 1 - t$, $z = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

c) La lunghezza dell'arco di estremi O e A è $\int_0^a \sqrt{t^2 + 1 + 2t}dt = \int_0^a (t + 1)dt = \frac{1}{2}a^2 + a$. L'equazione $\frac{1}{2}a^2 + a = 4$ ha soluzioni $a = 2$, $a = -4$. Il valore di a cercato è $a = 2$ a cui corrisponde il punto $A = (2, 2, \frac{8}{3})$.