Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Terzo appello** **7 Settembre 2015 A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 10 punti; Es.2: 6 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Data la funzione $f(x) := \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}}$, determinarne
   - limiti agli estremi del dominio
   - eventuali asintoti
   - derivata prima
   - estremi locali
   - numero minimo di flessi compatibili con le informazioni precedenti (senza studio di f'')

   Soluzione.

   $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

   Asintoto verticale per $x \to 0$. Asintoti obliqui $y = x + \frac{5}{3}$:

   $m := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^5}} = 1$

   $$q := \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}} - x = \lim_{x\to\pm\infty} x\Big(\sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^5}} - 1\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} x\Big((1+x^{-1})^{\frac{5}{3}} - 1\Big) = \frac{5}{3}\,.$$

   Derivata prima di $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}$:

   $$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}[5 - 2x^{-1}(x+1)] = \frac{1}{3}(1+x^{-1})^{\frac{2}{3}}(3-2x^{-1}) \qquad x \neq 0\,.$$

   Estremi locali:

   $x \in (-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ e' crescente

   $x \in (0, 2/3) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ e' descrente

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 2/3$

   $x_m := 2/3$ unico minimo locale.

   $x_f := -1$ flesso orizzontale.

2. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^2 + \frac{i}{z^2} = -\frac{\overline{z}^2}{2}\,.$$

Soluzione.

Per $w := z^2$ l'equazione diventa $w + \frac{i}{w} = -\frac{\overline{w}}{2}$. Moltiplicando per w si ha

$$w^2 = -\frac{|w|^2}{2} - i$$

da cui $\mathrm{Re}(w^2) = -\frac{|w|^2}{2}$, $\mathrm{Im}(w^2) = -1$, $|w^2|^2 = |w|^4 = \frac{|w|^4}{4} + 1$ e quindi $|w|^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Sostituendo

$$z^4 = w^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} - i = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

Le radici dell'equazione sono $z_k = |z_k|(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) \qquad k = 0, 1, 2, 3$ con $|z_k| = (\frac{2}{\sqrt{3}})^{1/4}$ e

$$\theta_k = \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

3. Sia π il piano di equazione $x - 2y + z - 1 = 0$ e sia r la retta rappresentata dal sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + z = 4 \end{cases} .$$

a) Determinare una rappresentazione parametrica della retta che si ottiene proiettando ortogonalmente r su π.

b) Determinare una rappresentazione parametrica della retta simmetrica di r rispetto a π.

SOLUZIONE

a) Basta determinare le proiezioni ortogonali P', Q' sul piano π di due punti P, Q della retta r e scrivere le equazioni parametriche della retta che passa per i due punti trovati.

Per prima cosa, rappresentiamo parametricamente la retta r. Ponendo $x = t$ e risolvendo il sistema rispetto a y e z, si ottiene facilmente

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 4 - 2t \end{cases} .$$

Il primo punto P potrebbe essere il punto di intersezione fra r e π, che si proietta su se stesso (risulta quindi $P' = P$). Sostituendo t, $3 - t$ e $4 - 2t$ al posto di x, y e z nell'equazione di π, si ottiene l'equazione

$$t - 2(3 - t) + 4 - 2t - 1 = 0\,,$$

che ha come soluzione $t = 3$, valore che corrisponde al punto $P \equiv (3, 0, -2)$. Il punto Q potrebbe essere quello corrispondente al valore $t = 0$, cioè il punto $(0, 3, 4)$. Per trovare Q' consideriamo la retta p che passa per Q ortogonale a π e la intersechiamo con π. Le equazioni parametriche di p sono

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases} .$$

Sostituendo nell'equazione di π si ottiene $t - 2(3 - 2t) + 4 + t - 1 = 0$, che ha come soluzione $t = \frac{1}{2}$, che corrisponde al punto $Q' \equiv (\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{9}{2})$. La proiezione ortogonale di r su π è la retta che passa per P' e Q', cioè la retta

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{5}{2}t \\ y = 2t \\ z = -2 + \frac{13}{2}t \end{cases}$$

Soluzione alternativa: nel fascio dei piani che contengono la retta r, si cerca quello ortogonale a π e poi lo si interseca con π.

b) Indicato con Q'' il simmetrico di Q rispetto a π, notiamo che la retta cercata è la retta che passa per P e Q''. Poniamo $Q'' = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$. Poiché Q' è il punto medio fra Q e Q'', sarà

$$\left(\frac{0 + \overline{x}}{2}, \frac{3 + \overline{y}}{2}, \frac{4 + \overline{z}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}\right)$$

da cui si ottiene $Q'' \equiv (1, 1, 5)$. La retta che passa per P e Q'' è quindi la retta

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -2 + 7t \end{cases} .$$

4. Sia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$f(x) = \frac{6(\arctan x - \sin x) + x^3}{(e^x - 1)\ln(1 + x^4)}\,.$$

Calcolare i seguenti limiti.

$$\text{i)}\quad \lim_{x\to 0} f(x)\,; \qquad \text{ii)}\quad \lim_{x\to +\infty} f(x)\,; \qquad \text{iii)}\quad \lim_{x\to -\infty} f(x)\,.$$

SOLUZIONE

i) Per $x \to 0$, risulta $e^x - 1 \sim x$ e $\ln(1 + x^4) \sim x^4$, per cui il denominatore è asintotico a x^5. Per quanto riguarda il numeratore, abbiamo $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$ e $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$, per cui risulta $6(\arctan x - \sin x) + x^3 = \dfrac{23}{20}x^5 + o(x^5) \sim \dfrac{23}{20}x^5$. Segue

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{23}{20}\,.$$

ii) Per $x \to +\infty$, il numeratore è asintotico a x^3 (il termine $6(\arctan x - \sin x)$ è limitato), mentre il denominatore va all'infinito più velocemente di e^x. Segue

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\,.$$

ii) Per $x \to -\infty$, il numeratore è sempre asintotico a x^3, mentre il denominatore è asintotico a $-\ln(1 + x^4)$ (a sua volta asintotico a $-\ln(x^4)$, cioè a $-4\ln|x|$). Segue

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty\,.$$