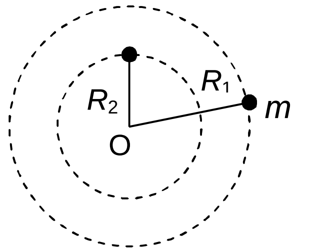
POLITECNICO DI MILANO – IV FACOLTÀ

Ingegneria Aerospaziale

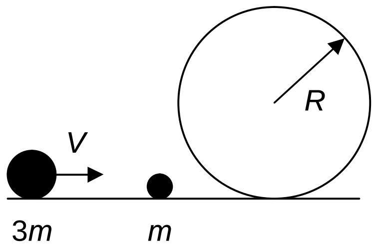
Fisica Sperimentale A+B - II Appello 6 settembre 2007

Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. Sostituire i valori numerici solo alla fine, dopo aver ricavato le espressioni letterali. Indicare nome e cognome (in stampatello) e matricola su ogni foglio

1. Un corpo di massa m è attaccato ad una fune ideale fissata ad un estremo nel punto O e ruota in un piano orizzontale privo di attrito descrivendo una circonferenza di raggio R_1 con velocità angolare ω_1. La fune viene quindi tirata, facendo diminuire il raggio della circonferenza descritta dal corpo.
   a) Sapendo che la fune è in grado di sopportare una tensione massima T_{max} , si calcoli il valore minimo R_{min} del raggio della circonferenza su cui può muoversi il corpo.
   b) Si calcoli inoltre il lavoro L necessario per portare il corpo su una circonferenza di raggio $R_2 < R_1$.

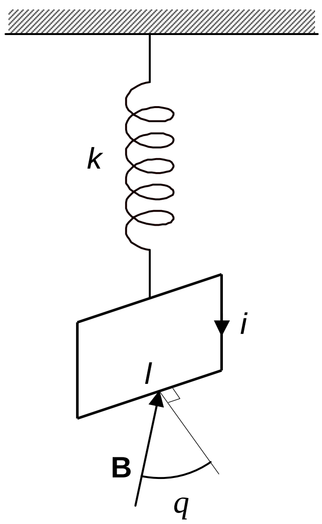


2. Una particella di massa $3m$, in moto su una guida orizzontale liscia con velocità costante V, urta elasticamente una particella di massa m inizialmente ferma. La guida prosegue formando un circuito circolare di raggio $R = 2$ m.
   a) Determinare le velocità delle due particelle dopo l'urto.
   b) Determinare il minimo valore di V affinché le due particelle compiano entrambe un giro completo. Si trascurino gli attriti.



3. Si enunci la legge di Gauss per il campo elettrico, sia in vuoto che in presenza di mezzi materiali, chiarendone il significato fisico.
   Si consideri un guscio sferico di raggio interno $R_1 = 5$ cm e raggio esterno $R_2 = 2\,R_1$. In tutto il volume all'interno del guscio è distribuita una carica $Q_{tot} = 5 \times 10^{-8}$ C con densità volumetrica uniforme.
   a) Calcolare il campo elettrico generato da tale distribuzione di carica in tutti i punti dello spazio.
   b) Calcolare la differenza di potenziale ΔV fra un punto sulla superficie esterna ed uno sulla superficie interna del guscio.
   Dati: costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ F/m)

4. Una molla è appesa verticalmente con l'estremo superiore fisso. Se all'estremo inferiore della molla è applicata una forza $F = 0.125$ N, si ottiene un allungamento $d = 1$ cm.
   a) Determinare la costante elastica k della molla.
   Rimossa la forza, all'estremità inferiore della molla si appende una spira rettangolare di massa trascurabile con lati orizzontali di lunghezza $l = 15$ cm. Il lato inferiore della spira è immerso in un campo magnetico di intensità $B = 0.5$ T uniforme e orizzontale. La spira è percorsa da corrente elettrica di intensità $i = 1$ A.
   b) Si determini la forza agente sulla molla e la sua deformazione quando il piano della spira è perpendicolare al campo magnetico, distinguendo fra i due possibili versi di circolazione della corrente.
   c) Fissato il verso della corrente, tracciare il grafico QUANTITATIVO dell'allungamento della molla in funzione dell'angolo q tra la normale al piano della spira e la direzione del campo magnetico.



Esercizio 1

Si consideri un sistema di riferimento con origine in O. Per la seconda legge cardinale dei sistemi si ha:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}.$$

Il vettore **r** indica la posizione di *m* rispetto a O, **v** è la velocità di *m* e **F** è la forza che agisce su *m*, corrispondente alla sola tensione del filo dal momento che il piano è orizzontale e le forze di attrito sono trascurabili. I vettori **r** e **F** sono paralleli, per cui:

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}\times m\,\mathbf{v} = \text{costante}.$$

La seconda di queste due equazioni descrive la *conservazione del momento angolare* di *m* rispetto a O. Ne segue che

$$r\,v = r^2 w = R_1^2 w_1 \quad \Rightarrow \quad w(r) = w_1 \frac{R_1^2}{r^2}.$$

a) La tensione T del filo è legata alla velocità angolare di m dalla seguente relazione:

$$T = m\,a_{\mathrm{cp}} = m w^2 r = m w_1^2 \frac{R_1^4}{r^3} \quad \Rightarrow \quad R_{\min} = \left(m w_1^2 \frac{R_1^4}{T_{\max}} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

b) Siccome il piano su cui si muove il corpo è orizzontale e privo di attrito, l'unica forza che compie lavoro è la tensione del filo. Il lavoro L da essa compiuto si ottiene grazie al teorema delle forze vive calcolando la differenza di energia cinetica fra la condizioni finali ed iniziali del moto:

$$L = \Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (w_2 R_2)^2 - \frac{1}{2} m (w_1 R_1)^2 = \frac{1}{2} m (w_1 R_1)^2 \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right).$$

Poiché $R_1 > R_2$, il lavoro L è *positivo.*

Esercizio 2

a) Siano v_1 e v_2 le componenti lungo la direzione orizzontale delle velocità delle particelle di massa rispettivamente m e $3m$ dopo l'urto. L'urto è elastico ed istantaneo, quindi si conservano sia la quantità di moto sia l'energia cinetica totali:

$$mv_1 + 3mv_2 = 3mV;$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{3}{2}mv_2^2 = \frac{3}{2}mV^2 .$$

Queste due equazioni hanno soluzione

$$v_1 = \frac{3}{2}V , \qquad v_2 = \frac{1}{2}V .$$

b) Affinché una particella di massa m e velocità v_0 riesca a compiere un giro completo della guida circolare, la particella deve avere nel punto più alto della traiettoria una velocità v tale per cui l'accelerazione centripeta della particella sia maggiore o uguale alla forza peso che agisce su di essa, ovvero

$$ma_{\mathrm{cp}} = m\frac{v^2}{R} \geq mg \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{min}} = \sqrt{gR} .$$

Poiché la guida è liscia, $v_{0\,\mathrm{min}}$ si ricava da v_{min} utilizzando la legge di conservazione dell'energia:

$$\Delta E_{\mathrm{tot}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{min}}^2 + 2mgR - \frac{1}{2}mv_{0\,\mathrm{min}}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0\,\mathrm{min}} = \sqrt{5gR} .$$

Si noti che questo risultato non dipende dalla massa della particella. Affinché entrambe le particelle dell'esercizio completino un giro della guida è quindi sufficiente imporre che la condizione descritta dall'ultima equazione sia soddisfatta dalla più lenta delle due. Si ottiene

$$v_{2\,\mathrm{min}} = \frac{1}{2}V = \sqrt{5gR} \quad \Rightarrow \quad V = 2\sqrt{5gR} = 19.8 \text{ m/s}.$$

Esercizio 3

Il teorema di Gauss ha il seguente enunciato:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \;=\; \oint \frac{r}{e}\mathrm{d}V \;=\; \frac{Q_{\text{int}}}{e} \qquad \text{(forma integrale),}$$

oppure

$$\text{Div}\;\mathbf{E} = \frac{r}{e} \qquad \text{(forma differenziale).}$$

La prima espressione (valida soltanto in presenza di un dielettrico uniforme) indica che il flusso del campo elettrico **E** attraverso una superficie chiusa deve eguagliare la carica totale contenuta all'interno della superficie, divisa per la costante dielettrica $e = e_0 e_\mathrm{r}$ del mezzo ($e_\mathrm{r} \geq 1$). La seconda espressione è valida anche in presenza di dielettrici non uniformi.

a) Per simmetria, il campo elettrico è radiale, ed è diretto verso l'esterno poiché la carica contenuta nel guscio è positiva. Si applichi il teorema di Gauss su una superficie sferica S di raggio r, concentrica al guscio di carica. Il campo elettrico $\mathbf{E}(r)$ è perpendicolare a tale superficie e ha modulo $E(r)$ costante, quindi il flusso di **E** attraverso S è pari a $4p\, r^2 E(r)$.

i. $r \leq R_1$: $E(r) = 0$ poiché non vi è carica elettrica all'interno della superficie S.

ii. $R_1 \leq r \leq R_2$: la carica elettrica $Q(r)$ contenuta all'interno della superficie S vale

$$Q(r) = Q_{tot}\,\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\,,$$

quindi

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4pe_0 r^2} \;=\; \frac{Q_{\text{tot}}}{4pe_0 r^2}\,\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\,.$$

Dal momento che $R_2 = 2R_1$,

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4pe_0 r^2} \;=\; \frac{Q_{\text{tot}}}{4pe_0 r^2}\,\frac{r^3 - R_1^3}{7R_1^3}\,.$$

iii. $r \geq R_2$: La carica totale contenuta all'interno della superficie S è pari a Q_{tot}, quindi

$$E(r) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4pe_0 r^2}\,.$$

b) La differenza di potenziale ΔV fra le due superfici del guscio si ottiene attraverso la definizione:

$$\Delta V \;=\; V_{\text{est}} - V_{\text{int}} = -\int_{R_1}^{R_2=2R_1} E(r)\mathrm{d}r \;=\; -\frac{Q_{\text{tot}}}{4pe_0}\,\frac{1}{7R_1} \;= -\,1.28\ \text{kV}.$$

Esercizio 4

a) La costante elastica k di una molla ideale è definita come la costante di proporzionalità fra la forza F applicata alla molla e la sua deformazione Δx lungo l'asse della molla stessa:

$$F = -kd_0 \quad \Rightarrow \quad k = -F/d_0 = 12.5 \text{ N/m}.$$

b) La forza **F** che agisce sul lato inferiore della spira non è altro che la forza di Lorentz. Dal momento che il campo magnetico è uniforme su tutta la lunghezza del filo la forza **F** vale

$$\mathbf{F} = i\,\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Si consideri un asse verticale z diretto verso l'alto. Con riferimento alla figura dell'esercizio si ottiene

$$F_z(q) = -ilB\,\text{sen}(90° + q) = -ilB\cos q \quad \Rightarrow \quad F_z(q = 0) = -ilB = -75 \text{ mN};$$

Per $i > 0$ $F_z(q = 0)$ è negativa, ovvero diretta verso il basso, e la molla si allunga; viceversa, per $i < 0$ $F_z(q = 0)$ è diretta verso l'alto e la molla si accorcia. La deformazione della molla (in valore assoluto) per $q = 0$ è data da.

$$\Delta z(q = 0) = |F_z(q = 0)|/k = ilB/k = 6 \text{ mm}.$$

c) Considerando le deformazioni $\Delta z(q)$ della molla positive se la molla si allunga, si ottiene:

$$\Delta z(q) = -F_z(q)/k = \frac{ilB}{k}\cos q\ .$$

Il grafico di $\Delta z(q)$ è il seguente: