Analisi e Geometria 1, Secondo appello 06 luglio 2016 (Compito A)

Terza parte

1. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore del seguente limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right).$$

Soluzione: Utilizzando lo sviluppo di Mac-Laurin della funzione $x \mapsto \sin x$ (arrestato al III^o ordine), abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right) &= x^{-\alpha}\frac{(\sin x)^2 - x^2}{x\sin x} = x^{-\alpha}\frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 - x^2}{x\,(x+o(x))} \\
&= x^{-\alpha}\frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2}{x\,(x+o(x))} = x^{-\alpha}\frac{x^4\left(-\frac{1}{3}+o(1)\right)}{x^2\,(1+o(1))} \\
&= x^{2-\alpha}\frac{\left(-\frac{1}{3}+o(1)\right)}{(1+o(1))} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2, \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 2, \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Sia r la retta rappresentata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

e sia π il piano parallelo a r che passa per i punti $A \equiv (2, 1, -1)$ e $B \equiv (1, 3, 1)$.

(a) Determinare una equazione del piano π.

(b) Determinare i punti P della retta r per i quali il triangolo APB è rettangolo in P.

Soluzione: (a) Nel fascio di piani che ha per sostegno la retta AB, cerchiamo quello parallelo a r. La retta AB è rappresentata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad .$$

Ricavando t dalla prima equazione e sostituendo nelle altre due, si ottengono le equazioni $2x+y-5 = 0$ e $2x+z-3 = 0$, che rappresentano due piani che contengono la retta AB. Il fascio dei piani che contengono la retta AB è allora rappresentato dalla equazione $2x+y-5+k(2x+z-3) = 0$, equivalente a

$$(2 + 2k)x + y + kz - 5 - 3k = 0\,.$$

In realtà, tale rappresentazione esclude il piano di equazione $2x + z - 3 = 0$, che però non è parallelo alla retta r e di conseguenza non è il piano cercato. Il generico piano del fascio è parallelo alla retta r se e solo se il vettore $\mathbf{n} = (2 + 2k, 1, k)$ — ad esso ortogonale — è ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (2, 1, 2)$ — che è parallelo a r — e ciò avviene se e solo se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, ossia se e solo se $4 + 4k + 1 + 2k = 0$, cioè se e solo se $k = -\frac{5}{6}$. Sostituendo tale valore di k nell'equazione del fascio e semplificando, si ottiene l'equazione

$$2x + 6y - 5z - 15 = 0\,,$$

che rappresenta il piano π.

(b) Sia $P \equiv (1 + 2t, 3 + t, 2t)$ il generico punto della retta r. Il triangolo APB è rettangolo in P se e solo se i vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$ sono ortogonali, cioè se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Poiché risulta $\overrightarrow{AP} = (1 + 2t, 3 + t, 2t) - (2, 1, -1) = (2t - 1, t + 2, 2t + 1)$ e $\overrightarrow{BP} = (1 + 2t, 3 + t, 2t) - (1, 3, 1) = (2t, t, 2t - 1)$, abbiamo che $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 9t^2 - 1$, per cui il prodotto scalare $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ si annulla se e solo se $t = 1/3$ oppure $t = -1/3$. Questi due valori del parametro t corrispondono rispettivamente ai due punti

$$P_1 \equiv \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)\,,$$

che sono i punti cercati.

3. Disegnare sul piano di Gauss il luogo dei punti A e il luogo dei punti B:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} : \quad \frac{|z+1|}{|z-i|} = 2 \right\},$$
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad Re\,(z) = \frac{1}{3} \right\}.$$

Risolvere quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{|z+1|}{|z-i|} = 2 \\ Re\,(z) = \frac{1}{3}\,. \end{cases}$$

Soluzione: A: moltiplicando per $|z-i|$ e ponendo $z = x + iy$ si ottiene:

$$|(x+1) + iy| = 2\,|x + i\,(y-1)|$$

Calcolando i moduli e ed elevando al quadrato si ottiene:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4\left[x^2 + (y-1)^2\right]$$
$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}y + 1 = 0$$

Si tratta di una circonferenza di centro $\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$ e raggio $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

B: una retta verticale che passa per tutti i punti di ascissa $\frac{1}{3}$. Quindi passa anche per il centro della circonferenza.

Dalla figura é immediato risolvere il sistema. Basta aggiungere e togliere il raggio alla parte immaginaria del centro. Le soluzioni z_1 e z_2 sono quindi:

$$z_1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i\right) + \frac{2}{3}\sqrt{2}i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(2 + \sqrt{2}\right)i$$
$$z_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i\right) - \frac{2}{3}\sqrt{2}i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)i$$

4. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4-x^2}} .$$

(a) Determinare gli eventuali asintoti di f.

(b) Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione f.

(c) Senza calcolare la derivata seconda, disegnare il grafico di f.

(d) Determinare l'immagine di f.

(e) Stabilire se l'integrale improprio

$$I = \int_2^{+\infty} \big(1 - f(x)\big)\, dx$$

converge.

Soluzione: $(k = 2)$ La funzione f è pari. Quindi basta studiarla per $x \geq 0$.

(a) La funzione f è definita solo per $x \neq \pm k$. Si ha

$$\lim_{x\to k^+} f(x) = \lim_{x\to k^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} = 0 \qquad \lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to (-k)^+} f(x) = \lim_{x\to (-k)^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} = +\infty \qquad \lim_{x\to (-k)^-} f(x) = \lim_{x\to (-k)^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} = 0 .$$

Pertanto, f ha come asintoto verticale la retta di equazione $x = k$ per $x \to k^-$ e ha ha come asintoto verticale la retta di equazione $x = -k$ per $x \to (-k)^+$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} = 1 .$$

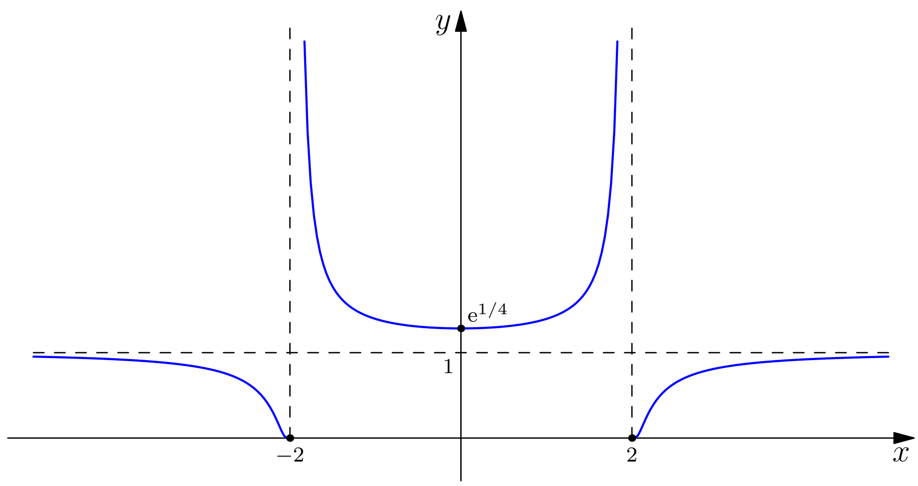
Quindi f possiede anche un asintoto verticale, di equazione $y = 1$, per $x \to \pm\infty$.

(b) La funzione f è derivabile per ogni $x \neq \pm k$ e la sua derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2kx}{(k^2 - x^2)^2}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} .$$

Pertanto, $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Quindi f presenta un punto di minimo locale in corrispondenza di $x = 0$, dato da $M \equiv (0, \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2}})$. Non ci sono altri punti di estremo.

(c) Il grafico di f è



(d) L'immagine di f è $\operatorname{Im} f = (0, 1) \cup (\mathrm{e}^{\frac{1}{k^2}}, +\infty)$.

(e) La funzione

$$g(x) = 1 - f(x) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2 - x^2}}$$

è definita, continua e positiva su tutto l'intervallo $(k, +\infty)$. Per $x \to k^+$, la funzione f è limitata (poiché $f(x) \to 0$, come abbiamo già visto). Inoltre, per $x \to +\infty$, si ha

$$\frac{1}{k^2 - x^2} \to 0$$

e quindi

$$g(x) \sim -\frac{1}{k^2 - x^2} \sim \frac{1}{x^2}\,.$$

Poiché la funzione $1/x^2$ è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico si ha che anche la funzione $g(x)$ è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$. Pertanto, in conclusione, l'integrale improprio I converge.

Analisi e Geometria 1, Secondo appello 06 luglio 2016 (Compito B)

Terza parte

1. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore del seguente limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \left(\frac{x}{\sin x} - \frac{\sin x}{x} \right).$$

Soluzione: Utilizzando lo sviluppo di Mac-Laurin della funzione $x \mapsto \sin x$ (arrestato al III^o ordine), abbiamo

$$\begin{aligned} x^\alpha \left(\frac{x}{\sin x} - \frac{\sin x}{x} \right) &= x^\alpha \frac{x^2 - (\sin x)^2}{x \sin x} = x^\alpha \frac{x^2 - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2}{x\,(x + o(x))} \\ &= x^\alpha \frac{x^2 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x\,(x+o(x))} = x^\alpha \frac{x^4\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)}{x^2\,(1+o(1))} \\ &= x^{2+\alpha} \frac{\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)}{(1+o(1))} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -2, \\ \frac{1}{3} & \text{se } \alpha = -2, \\ +\infty & \text{se } \alpha < -2. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Sia r la retta rappresentata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

e sia π il piano parallelo a r che passa per i punti $A \equiv (1, 2, -1)$ e $B \equiv (3, 1, 1)$.

a) Determinare una equazione del piano π.

b) Determinare i punti P della retta r per i quali il triangolo APB è rettangolo in P.

Soluzione: (a) Nel fascio di piani che ha per sostegno la retta AB, cerchiamo quello parallelo a r. La retta AB è rappresentata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} .$$

Ricavando t dalla seconda equazione e sostituendo nelle altre due, si ottengono le equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2y + z - 3 = 0$, che rappresentano due piani che contengono la retta AB. Il fascio dei piani che contengono la retta AB è allora rappresentato dalla equazione $x + 2y - 5 + k(2y + z - 3) = 0$, equivalente a

$$x + (2 + 2k)y + kz - 5 - 3k = 0 .$$

In realtà, tale rappresentazione esclude il piano di equazione $2y + z - 3 = 0$, che però non è parallelo alla retta r e di conseguenza non è il piano cercato. Il generico piano del fascio è parallelo alla retta r se e solo se il vettore $\mathbf{n} = (1, 2 + 2k, k)$ — ad esso ortogonale — è ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ — che è parallelo a r — e ciò avviene se e solo se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, ossia se e solo se $1 + 4 + 4k + 2k = 0$, cioè se e solo se $k = -\frac{5}{6}$. Sostituendo tale valore di k nell'equazione del fascio e semplificando, si ottiene l'equazione

$$6x + 2y - 5z - 15 = 0 ,$$

che rappresenta il piano π.

b) Sia $P \equiv (3 + t, 1 + 2t, 2t)$ il generico punto della retta r. Il triangolo APB è rettangolo in P se e solo se i vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$ sono ortogonali, cioè se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Poiché risulta $\overrightarrow{AP} = (3 + t, 1 + 2t, 2t) - (1, 2, -1) = (t + 2, 2t - 1, 2t + 1)$ e $\overrightarrow{BP} = (3 + t, 1 + 2t, 2t) - (3, 1, 1) = (t, 2t, 2t - 1)$, abbiamo che $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 9t^2 - 1$, per cui il prodotto scalare $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ si annulla se e solo se $t = 1/3$ oppure $t = -1/3$. Questi due valori del parametro t corrispondono rispettivamente ai due punti

$$P_1 \equiv \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 \equiv \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) ,$$

che sono i punti cercati.

3. Disegnare sul piano di Gauss il luogo dei punti A e il luogo dei punti B:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} : \quad \frac{|z-i|}{|z+1|} = 2 \right\},$$
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad Im\,(z) = -\frac{1}{3} \right\}.$$

Risolvere quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{|z-i|}{|z+1|} = 2 \\ Im\,(z) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Soluzione: A: moltiplicando per $|z+1|$ e ponendo $z = x + iy$ si ottiene:

$$|x + i\,(y-1)| = 2\,|(x+1) + iy|$$

Calcolando i moduli e ed elevando al quadrato si ottiene:

$$x^2 + (y-1)^2 = 4\left[(x+1)^2 + y^2\right]$$
$$x^2 + y^2 + \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}y + 1 = 0$$

Si tratta di una circonferenza di centro $-\frac{4}{3} - \frac{1}{3}i$ e raggio $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

B: una retta orizzontale che passa per tutti i punti di ordinata $-\frac{1}{3}i$. Quindi passa anche per il centro della circonferenza.

Dalla figura é immediato risolvere il sistema. Basta aggiungere e togliere il raggio alla parte reale del centro. Le soluzioni z_1 e z_2 sono quindi:

$$z_1 = \left(-\frac{4}{3} - \frac{1}{3}i\right) + \frac{2}{3}\sqrt{2} = -\frac{2}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{3}i$$
$$z_2 = \left(-\frac{4}{3} - \frac{1}{3}i\right) - \frac{2}{3}\sqrt{2} = -\frac{2}{3}\left(2 + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{3}i$$

4. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{9-x^2}} .$$

(a) Determinare gli eventuali asintoti di f.

(b) Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione f.

(c) Senza calcolare la derivata seconda, disegnare il grafico di f.

(d) Determinare l'immagine di f.

(e) Stabilire se l'integrale improprio

$$I = \int_3^{+\infty} \big(1 - f(x)\big)\, dx$$

converge.

Soluzione: $(k = 3)$ La funzione f è pari. Quindi basta studiarla per $x \geq 0$.

(a) La funzione f è definita solo per $x \neq \pm k$. Si ha

$$\lim_{x\to k^+} f(x) = \lim_{x\to k^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} = 0 \qquad \lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to (-k)^+} f(x) = \lim_{x\to (-k)^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} = +\infty \qquad \lim_{x\to (-k)^-} f(x) = \lim_{x\to (-k)^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} = 0 .$$

Pertanto, f ha come asintoto verticale la retta di equazione $x = k$ per $x \to k^-$ e ha ha come asintoto verticale la retta di equazione $x = -k$ per $x \to (-k)^+$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} = 1 .$$

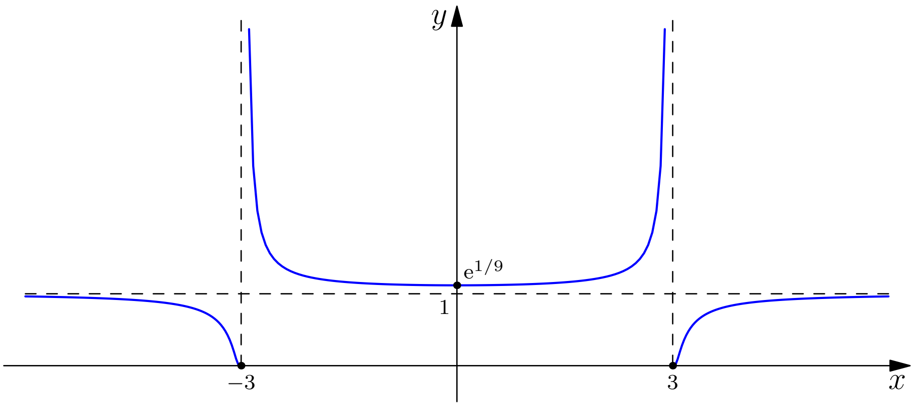
Quindi f possiede anche un asintoto verticale, di equazione $y = 1$, per $x \to \pm\infty$.

(b) La funzione f è derivabile per ogni $x \neq \pm k$ e la sua derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2kx}{(k^2-x^2)^2}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2-x^2}} .$$

Pertanto, $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Quindi f presenta un punto di minimo locale in corrispondenza di $x = 0$, dato da $M \equiv (0, \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2}})$. Non ci sono altri punti di estremo.

(c) Il grafico di f è



(d) L'immagine di f è $\operatorname{Im} f = (0,1) \cup (\mathrm{e}^{\frac{1}{k^2}}, +\infty)$.

(e) La funzione
$$g(x) = 1 - f(x) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k^2 - x^2}}$$
è definita, continua e positiva su tutto l'intervallo $(k, +\infty)$. Per $x \to k^+$, la funzione f è limitata (poiché $f(x) \to 0$, come abbiamo già visto). Inoltre, per $x \to +\infty$, si ha
$$\frac{1}{k^2 - x^2} \to 0$$
e quindi
$$g(x) \sim -\frac{1}{k^2 - x^2} \sim \frac{1}{x^2}\,.$$
Poiché la funzione $1/x^2$ è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico si ha che anche la funzione $g(x)$ è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$. Pertanto, in conclusione, l'integrale improprio I converge.