Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **5 Settembre 2011** **Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Stabilire per quali valori del parametro reale α, la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt[3]{1-x^2}}{(\arctan x)^\alpha} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$.

SOLUZIONE

Si noti preliminarmente che f è continua in tutti i punti $x \neq 0$. Di conseguenza bisogna calcolare il valore del limite destro e sinistro di f in $x = 0$. Per quanto riguarda il limite destro, utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin opportuni, possiamo dedurre le relazioni di asintoticità

$$1 - \sqrt[3]{1-x^2} \sim \frac{x^2}{3}$$

e

$$(\arctan x)^\alpha \sim x^\alpha$$

per $x \to 0^+$. Di conseguenza, tornando al limite, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0^+, & \text{se } \alpha < 2, \\ \frac{1}{3}, & \text{se } \alpha = 2, \\ +\infty, & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Inoltre, il limite sinistro vale 0 per ogni α. Di conseguenza, f risulta continua per $\alpha < 2$.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(e^x - x)$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Dominio di f:
$D(f) = \mathbb{R}$. Si osservi ciò è conseguenza della diseguaglianza $e^x > x$, che può essere dedotta per ogni $x \in \mathbb{R}$ da un semplice confronto grafico.

Studio del segno di f:
$f(x) > 0$ per $x \neq 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$. Anche in questo caso, questo si può dedurre per confronto grafico tra le funzioni e^x e $x + 1$.

Limiti agli estremi:
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Eventuali asintoti:
$y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, mentre per $x \to -\infty$ la funzione non ammette asintoti.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

Studio del segno di f':
$f'(x) > 0$ in $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$ e $f'(x) = 0$ per $x = 0$.

Estremanti di f:
f ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$. Non esistono massimi assoluti.

Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{(x-2)e^x + 1}{(e^x - x)^2}$$

Studio del segno di f'':
Studiando (ancora una volta per confronto grafico) la diseguaglianza $e^{-x} > 2 - x$, si deduce l'esistenza di $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ tali che $f''(x) > 0$ in (α, β), $f''(x) < 0$ in $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ e $f''(x) = 0$ per $x = \alpha, \beta$.

Convessità/concavità:
$x = \alpha$ e $x = \beta$ sono punti di flesso per f.

Grafico di f:

3. Sia data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{1-y}.$$

(a) Trovare l'integrale generale;

(b) risolvere il problema di Cauchy che associa all'equazione il dato iniziale $y(0) = 2$, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

SOLUZIONE

(a) L'equazione è a variabili separabili. Notiamo preliminarmente che, affinchè l'equazione abbia un senso, allora $y(x) \neq 1$ sul suo insieme di definizione. Notiamo anche che non sono presenti soluzioni costanti, perchè il secondo membro non è mai nullo. Allora, procedendo per separazione di variabili, si ha

$$\int (1-y)dy = \int dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{(1-y)^2}{2} = x + c \quad \Rightarrow \quad 1 - y = \pm\sqrt{-2x+c},\ y = 1 \pm \sqrt{-2x+c},$$

da cui deduciamo che l'integrale generale è dato delle funzioni

$$y(x) = 1 + \sqrt{-2x+c}, \quad \text{se} \quad y(x) > 1,$$

e

$$y(x) = 1 - \sqrt{-2x+c}, \quad \text{se} \quad y(x) < 1,$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

(b) Si noti che la condizione di Cauchy $y(0) = 2$ forza la soluzione ad essere sempre maggiore di 1. Di conseguenza, la formula di rappresentazione opportuna è la prima delle due. Quindi, imponendo $y(0) = 2$, si trova

$$1 + \sqrt{c} = 2 \Rightarrow c = 1$$

e, dunque, la soluzione cercata ammette la formula di rappresentazione

$$y(x) = 1 + \sqrt{1-2x}.$$

Tale funzione è soluzione dell'equazione data nell'intervallo $(-\infty, 1/2)$.

4. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{xy\sin y}{\sqrt{1+x^2}}ds,$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2/2), \quad t \in [0,1].$$

SOLUZIONE

Si ha che

$$ds = |\gamma'(t)|dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \sqrt{1+t^2}dt.$$

Di conseguenza, con semplici conti si verifica che l'integrale richiesto è uguale a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}t^3 \sin\left(\frac{1}{2}t^2\right) dt.$

Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 t^2 t \sin\left(\frac{1}{2}t^2\right) dt &= \frac{1}{2}\left[\left|-t^2 \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right)\right|_0^1 + \int_0^1 2t \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right) dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\cos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left|\sin\left(\frac{1}{2}t^2\right)\right|_0^1\right] \\
&= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **5 Settembre 2011** **Compito B**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Stabilire per quali valori del parametro reale α, la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x - 1)^\alpha}{1 - \sqrt[5]{1 - x^4}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \ln(1 + x^2) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$.

SOLUZIONE

Si noti preliminarmente che f è continua in tutti i punti $x \neq 0$. Di conseguenza bisogna calcolare il valore del limite destro e sinistro di f in $x = 0$. Per quanto riguarda il limite destro, utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin opportuni, possiamo dedurre le relazioni di asintoticità

$$(e^x - 1)^\alpha \sim x^\alpha$$

e

$$1 - \sqrt[5]{1 - x^4} \sim \frac{x^4}{5}$$

per $x \to 0^+$. Di conseguenza, tornando al limite, abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0^+, & \text{se } \alpha > 4, \\ 5, & \text{se } \alpha = 4, \\ +\infty, & \text{se } \alpha < 4. \end{cases}$$

Inoltre, il limite sinistro vale 0 per ogni α. Di conseguenza, f risulta continua per $\alpha > 4$.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(e^x - x)$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Dominio di f:
$D(f) = \mathbb{R}$. Si osservi ciò è conseguenza della diseguaglianza $e^x > x$, che può essere dedotta per ogni $x \in \mathbb{R}$ da un semplice confronto grafico.

Studio del segno di f:
$f(x) > 0$ per $x \neq 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$. Anche in questo caso, questo si può dedurre per confronto grafico tra le funzioni e^x e $x + 1$.

Limiti agli estremi:
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Eventuali asintoti:
$y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, mentre per $x \to -\infty$ la funzione non ammette asintoti.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

Studio del segno di f':
$f'(x) > 0$ in $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$ e $f'(x) = 0$ per $x = 0$.

Estremanti di f:
f ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$. Non esistono massimi assoluti.

Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{(x-2)e^x + 1}{(e^x - x)^2}$$

Studio del segno di f'':
Studiando (ancora una volta per confronto grafico) la diseguaglianza $e^{-x} > 2 - x$, si deduce l'esistenza di $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ tali che $f''(x) > 0$ in (α, β), $f''(x) < 0$ in $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ e $f''(x) = 0$ per $x = \alpha, \beta$.

Convessità/concavità:
$x = \alpha$ e $x = \beta$ sono punti di flesso per f.

Grafico di f:

3. Sia data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{y-2}.$$

(a) Trovare l'integrale generale;

(b) risolvere il problema di Cauchy che associa all'equazione il dato iniziale $y(0) = 0$, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

SOLUZIONE

(a) L'equazione è a variabili separabili. Notiamo preliminarmente che, affinchè l'equazione abbia un senso, allora $y(x) \neq 2$ sul suo insieme di definizione. Notiamo anche che non sono presenti soluzioni costanti, perchè il secondo membro non è mai nullo. Allora, procedendo per separazione di variabili, si ha

$$\int (y-2)dy = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{(y-2)^2}{2} = x + c \quad \Rightarrow \quad y - 2 = \pm\sqrt{2x+c},\ y = 2 \pm \sqrt{2x+c},$$

da cui deduciamo che l'integrale generale è dato delle funzioni

$$y(x) = 2 + \sqrt{2x+c}, \quad \text{se} \quad y(x) > 2,$$

e

$$y(x) = 2 - \sqrt{2x+c}, \quad \text{se} \quad y(x) < 2,$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

(b) Si noti che la condizione di Cauchy $y(0) = 2$ forza la soluzione ad essere sempre minore di 2. Di conseguenza, la formula di rappresentazione opportuna è la seconda delle due. Quindi, imponendo $y(0) = 0$, si trova

$$2 - \sqrt{c} = 0 \Rightarrow c = 4$$

e, dunque, la soluzione cercata ammette la formula di rappresentazione

$$y(x) = 2 - \sqrt{2x+4}.$$

Tale funzione è soluzione dell'equazione data nell'intervallo $(-2, +\infty)$.

4. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{xy\cos x}{\sqrt{4+y^2}}ds,$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t^2, 2t), \quad t \in [0, 1/2].$$

SOLUZIONE

Si ha che

$$ds = |\gamma'(t)|dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \sqrt{4+4t^2}dt.$$

Di conseguenza, con semplici conti si verifica che l'integrale richiesto è uguale a $\displaystyle\int_0^{1/2} 2t^3 \cos\left(t^2\right) dt$.

Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} t^2 2t \cos\left(t^2\right) dt &= \left|t^2 \sin\left(t^2\right)\right|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} 2t \sin\left(t^2\right) dt \\
&= \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{4}\right) + \left|\cos\left(t^2\right)\right|_0^{1/2} \\
&= \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{4}\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\right) - 1.
\end{aligned}$$