1. Calcolare la successione delle somme parziali S_n della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \log \frac{n+1}{n}$, dedurre che la serie è divergente.

   Si ha che $\log = \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n$, quindi $S_n = (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + ... + (\log(n+1) - \log n) = \log(n+1)$. Poiché $S_n \to +\infty$, per $n \to +\infty$, la serie diverge a $+\infty$.

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x + \cos x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Scrivere la formula di Mac-Laurin arrestata al II ordine della soluzione.

L'integrale generale è $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x)$; la soluzione del problema di Cauchy è: $y = 2\cos x + \frac{3}{2}\sin x + x(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x)$. Si ha che $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -y(0) + \sin 0 + \cos 0 = -1$, lo sviluppo allora è: $y(x) = 2 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

3. Calcolare il seguente integrale doppio: $\iint_D xydxdy$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ y \leq 1,\ y \leq \log\frac{1}{x}\}$.

D è x-semplice: $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq e^{-y}\}$, quindi $\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{e^{-y}} xydx\right) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 ye^{-2y}dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\frac{1}{e^2}\right)$

4. Sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ k & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

a) Dopo aver calcolato gli autovalori di $\mathbf{A}$, stabilire per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile.

b) Per i valori di k per cui $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ e una matrice diagonale simile a $\mathbf{A}$.

a) Gli autovali sono $\lambda = 3$, avente molteplicità algebrica 2, e $\lambda = 2$ con molteplicità 1. L'autovalore $\lambda = 2$ è semplice e quindi regolare. L'autovalore $\lambda = 3$ è regolare se l'autospazio relativo ha dimensione 2. Calcoliamo gli autovettori relativi a $\lambda = 3$ risolvendo il sistema: $A - 3I = \underline{0}$, cioè $-7z = 0, kx + 4z = 0, -z = 0$. Se $k = 0$ il sistema ha per soluzioni i vettori $(x, y, 0)$ che formano uno spazio di dimensione 2, se invece $k \neq 0$ il sistema ha per soluzione i vettori $(0, y, 0)$ che formano uno spazio di dimensione 1. Dunque A è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$.

b) Una base di autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 3$ è costituita ad esempio dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 2$ è ad esmpio il vettore $(7, -4, 1)$. I tre vettori cocituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Una matrice diagonale simile ad A è

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$