Matricola:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Istruzioni: riempire ***completamente*** *le bolle con le cifre del numero di matricola (una cifra per colonna); nella parte sotto del foglio, riempire* ***completamente*** *le bolle con le risposte alle domande a scelta multipla. Per riempire, usare penna o matita nera, colorando tutto l'interno e cercando di non uscire dal bordo. Non sono ammesse correzioni, dato che il foglio verrà analizzato da un computer.*

Cognome:.. **Nome**:..

Segnare le risposte delle domande a scelta multipla

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(9) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(10) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(11) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(12) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

Domande a scelta multipla

* Gli esercizi marcati con un asterisco valgono più punti e vanno giustificati in maniera sintetica e chiara sul retro del primo foglio. In particolare, per i test specificare: tipo di test, ipotesi nulla ed alternativa, statistica utilizzata e suo valore numerico, regione di rifiuto o P-value con relativa stima (a seconda dei casi e di quanto richiesto nel testo).

(1) * In un test d'ipotesi per la media a varianza nota con $H_0 : \mu \geq \mu_0$ e $H_1 : \mu < \mu_0$ si rifiuta H_0 ad un livello $\alpha = 0.05$ in corrispondenza ad un campione di ampiezza n. Si prenda ora un campione di ampiezza $m > n$ tale che $\overline{x}_m = \overline{x}_n$; cosa succede al $P - value\ \overline{\alpha}$? (Sugg: ricordarsi che $\phi(x) < 1/2$ se e solo se $x < 0$.)

- ☐ *(a)* aumenta.
- ☐ *(b)* non cambia.
- ☐ *(c)* [=] diminuisce.
- ☐ *(d)* dipende dal valore della deviazione standard σ.
- ☐ *(e)* dipende dal segno di $\overline{x}_n$.

(2) Siano X e Y due variabili aleatorie normali indipendenti, $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(b, \kappa^2)$. Che legge ha $X - Y$?

- ☐ *(a)* $\mathcal{N}(a + b, \sigma^2 + \kappa^2)$.
- ☐ *(b)* $\mathcal{N}(a - b, \sigma^2 - \kappa^2)$.
- ☐ *(c)* $\mathcal{N}(a - b, (\sigma - \kappa)^2)$.
- ☐ *(d)* [=] $\mathcal{N}(a - b, \sigma^2 + \kappa^2)$.
- ☐ *(e)* $\mathcal{N}(a - b, \sigma^2\kappa^2)$.

(3) Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. indipendenti identicamente distribuite con valore atteso μ e varianza σ^2. Per n grande si ha:

- ☐ *(a)* $\overline{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu, 0)$.
- ☐ *(b)* $\overline{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu - \sigma^2/n, 0)$.
- ☐ *(c)* $\overline{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$. *(*) Qui basta che $x_1 < x_2 = \cdot x_n$; se $n \to \infty$ allora $s_n^2 \to 0$ e $\bar{x}_n \to x_2$.*
- ☐ *(d)* [=] $\overline{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu - \sigma^2/n, \sigma^2/n)$.
- ☐ *(e)* $\overline{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(4) * Un treno ha n carrozze; i numeri dei passeggeri delle carrozze sono variabili binomiali indipendenti di parametri $n = 20$ e $p = 3/4$. Quante carrozze deve avere come minimo il treno affinchè la probabilità di avere almeno una carrozza piena sia superiore a 0.5?

- ☐ *(a)* Più di 42.
- ☐ *(b)* Più di 97.
- ☐ *(c)* [=] Più di 218.
- ☐ *(d)* Più di 150.
- ☐ *(e)* Più di 964.

(5) * Un dado viene lanciato 600 volte ottenendo le seguenti frequenze relative: $f_r(1) = 1/8$, $f_r(2) = 5/24$, $f_r(3) = 1/6$, $f_r(4) = 1/8$, $f_r(5) = 3/20$ e $f_r(6) = 9/40$. Cosa possiamo concludere sul fatto che il dado sia equilibrato a livello 5%, 2.5% e 1%?

- ☐ *(a)* Accetto all'1%, rifiuto al 2.5% e al 5%.
- ☐ *(b)* Accetto all'1%, al 2.5% e al 5%.
- ☐ *(c)* [=] Rifiuto all'1%, al 2.5% e al 5%. *(*) La stima* $q = 32$ *da cui* $\overline{\alpha} < 0.001$.
- ☐ *(d)* Accetto all'1% e al 2.5%, rifiuto al 5%.
- ☐ *(e)* Rifiuto all'1% e al 2.5%, accetto al 5%.

(6) * Due tipi di pezzi A e B vengono lavorati contemporaneamente da due macchine che operano in maniera indipendente. Siano $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ e $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ i tempi di lavorazione (che si suppongono indipendenti) di 10 pezzi di tipo A e 10 pezzi di tipo B rispettivamente. Supponendo che, per ogni $i = 1, \dots, 10$, valga $X_i \sim \mathcal{N}(1, 4)$ e $Y_i \sim \mathcal{N}(4, 1)$; quanto vale la probabilità che per qualche i si verifichi $X_i > Y_i$?

- ☐ *(a)* Circa 0.0116.
- ☐ *(b)* Circa 0.9173.
- ☐ *(c)* [=] Circa 0.6097. *(*)* $X_i - Y_i \sim \mathcal{N}(-3, 5)$. *Si utilizzi* $\mathbb{P}(X_i - Y_i \leq 0) = \Phi(3/\sqrt{5}) = \Phi(1.341) \approx 0.9102$, *da cui la probabilità cercata è* $1 - \mathbb{P}(X_1 \leq Y_1)^{10} \approx 0.6097$
- ☐ *(d)* Circa 0.3274.
- ☐ *(e)* Circa 0.5.

(7) Sia

$$f_k(x) = \begin{cases} kx \log x & x \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver determinato per quale valore di k tale funzione rappresenta la densità di una variabile aleatoria, si calcoli il valore atteso di tale variabile.

- ☐ *(a)* [=] $4/9$. *(*) Integrando per parti si trova che una primitiva per* $x^n \log x$ *è* $(x^{n+1}/(n+1)) \cdot (\log x - 1/(n+1))$ *da cui l'unica possibilità è* $k = -4$ *e di conseguenza il valore atteso* $4/9$.
- ☐ *(b)* $5/12 \log(2)$.
- ☐ *(c)* $1/2$.
- ☐ *(d)* $2 \log(3/2)$.
- ☐ *(e)* Nessuno dei precedenti.

(8) Nella produzione di semiconduttori non è possibile controllare esattamente la resistenza degli elementi prodotti. Supponiamo che vengano misurati i valori della resistenza per $n = 20$ semiconduttori, ottenendo una media campionaria $\bar{x} = 12.3$ ed una varianza campionaria $s^2 = 40$.

Determinare l'intervallo bilaterale di confidenza al 95% per la media della resistenza dei semiconduttori prodotti.

- ☐ *(a)* $[9.34, 14.15]$.
- ☐ *(b)* [=] $[9.34, 15.26]$.
- ☐ *(c)* $[7.12, 17.48]$.
- ☐ *(d)* $[10.45, 14.15]$.
- ☐ *(e)* $[11.05, 13.55]$.

(9) Siano A e B^c eventi indipendenti. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- ☐ *(a)* [=] $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B)$.
- ☐ *(b)* $\mathbb{P}(A \cup B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$.
- ☐ *(c)* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- ☐ *(d)* $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) + 1 - \mathbb{P}(B)$
- ☐ *(e)* $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

(10) Supponiamo di voler eseguire un test d'ipotesi di livello α per testare l'ipotesi H_0 contro l'ipotesi H_1. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?

- ☐ *(a)* Se accetto H_0, essa è vera con probabilità al massimo α.
- ☐ *(b)* [=] Se H_0 è vera, la probabilità di rifiutarla è al massimo α.
- ☐ *(c)* Se H_0 è falsa la probabilità di rifiutarla è al massimo α.
- ☐ *(d)* Se accetto H_0, essa è sicuramente vera.
- ☐ *(e)* Se H_0 è vera, la probabilità di accettarla è almeno α.

(11) * Un amico di Romualdo, di nome Procopio, ha un problema particolare. Da anni Procopio, quando cammina per strada, sbatte la testa contro i cartelli stradali sistematicamente almeno in 25 uscite su 30, quasi ne fosse attratto da una forza misteriosa. Romualdo ha deciso quindi di mettere in atto il seguente rimedio: prima di ogni uscita lo fa ubriacare sperando che l'andatura barcollante lo aiuti ad evitare i cartelli. Dall'inizio di questa "cura" su 20 passeggiate Procopio ha sbattuto contro qualche cartello solo in 15 uscite. Valutare se il rimedio di Romualdo 'e davvero efficace, proponendo un test e calcolandone il P-value. Quale tra le seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ *(a)* Ci sono abbastanza evidenze dell'efficacia della cura.
- ☐ *(b)* Non si hanno sufficienti informazioni per poter stabilire il valore del p-value, ma possiamo dire che la cura non è efficace al livello di significatività del 5%.
- ☐ *(c)* [=] Non ci sono abbastanza evidenze dell'efficacia della cura. *(*)* $p_0 = 5/6$, $\overline{p} = 3/4$, $H_1 : p < p_0$ *da cui il* P*-value è* $\Phi(z)$ *dove* $z = (3/4 - 5/6)/\sqrt{5/(36 \cdot 20)} = -1$. *Essendo* $\Phi(-1) \approx 0.158655$ *non ci sono evidenze sull'efficacia.*
- ☐ *(d)* Non si hanno sufficienti informazioni per poter stabilire il valore del p-value, ma possiamo dire che la cura non è efficace al livello di significatività del 10%.
- ☐ *(e)* Il P-value è circa 0.22.

(12) * Lancio una moneta equilibrata: se viene testa lancio un dado e denoto con X il numero uscito mentre se viene croce lancio due dadi e denoto con X la media aritmetica dei due numeri usciti. Dato che $X \leq 3$ qual è la probabilità che sia uscita testa?

- ☐ *(a)* $1/2$.
- ☐ *(b)* $5/11$.
- ☐ *(c)* $4/7$.
- ☐ *(d)* [=] $6/11$. *(*) Sia* Y *il lancio della moneta.* $\mathbb{P}(Y = T) = \mathbb{P}(Y = C) = 1/2$, $\mathbb{P}(X \leq 3|X = T) = 1/2$, $\mathbb{P}(X \leq 3|X = C) = (1 - 1/6)/2 = 5/12$ *da cui* $\mathbb{P}(X = T|X \leq 3) = (1/2)/(1/2 + 5/12) = 6/11$.
- ☐ *(e)* $7/12$.