

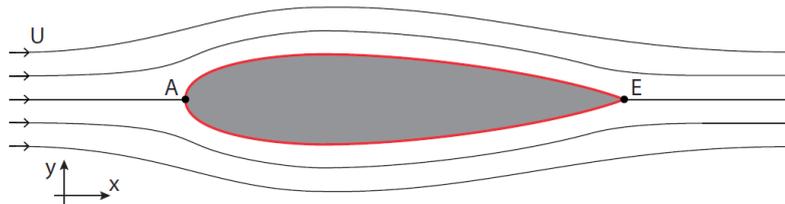
FLUSSI ESTERNI

Introduzione

Fino ad ora abbiamo analizzato la dinamica dei fluidi Newtoniani di flussi interni, fluidi cioè che sono in movimento e sono circondati da superfici solide. Molti problemi ingegneristici però riguardano il caso duale di oggetti solidi investiti da un flusso di fluido newtoniano che li avvolge completamente. In questo secondo caso si parla di flussi esterni su corpi immersi.

Fenomenologia: fluido ideale esterno a profilo alare

Consideriamo il caso in cui un oggetto solido dotato di piano di simmetria si muova con una certa velocità U costante nel tempo all'interno di un fluido che si può considerare fermo ad una sufficiente distanza dal corpo. Utilizzando la relatività galileiana possiamo metterci in un sistema di riferimento solidale con il corpo che risulta quindi fermo e investito da una corrente fluida avente profilo uniforme di velocità, di modulo U , a monte dell'oggetto. Essendo un fluido ideale non vale la condizione di aderenza alla parete quindi la velocità del fluido in corrispondenza della superficie solida non è nulla e di conseguenza esistono linee di corrente che appartengono alla superficie dell'oggetto. I punti da cui queste linee divergono e convergono sono detti punti di stagnazione; nello specifico quello da cui divergono è detto punto di attacco mentre il punto a cui convergono è detto punto di uscita. In questi punti la pressione è massima visto che la velocità è minima (dal teorema di Bernoulli). Nell'area di passaggio dunque la velocità aumenta e la pressione diminuisce



Fenomenologia: fluido reale esterno a profilo alare

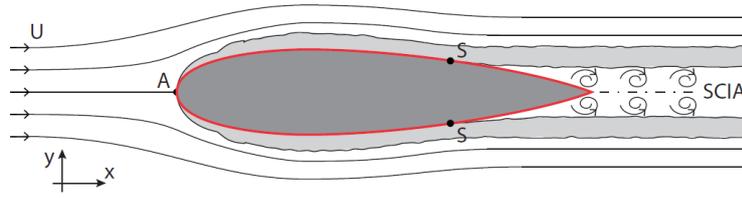
Consideriamo ora il caso in cui il fluido sia reale. In questo caso vale invece la condizione di aderenza e dunque la velocità del fluido in corrispondenza della superficie solida è nulla. Lontano dalla superficie la velocità del fluido è pari a U dunque deve necessariamente essere presente un gradiente di velocità così che questa possa passare da un valore nullo al suo modulo massimo. La zona intorno al corpo in cui deve essere presente questo gradiente di velocità avrà uno spessore δ . Per valutare lo spessore δ possiamo ricorrere all'analisi degli ordini di grandezza nel caso di corpi affusolati, corpi cioè per i quali la dimensione in direzione y è molto minore di quella in direzione x . Dall'analisi dimensionale dell'equazione di continuità e dell'equazione del bilancio di quantità di moto possiamo ricavare la seguente equazione:

$$\delta \sim l \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

Intuiamo così che nel caso di un fluido reale possiamo distinguere:

1. Strato limite adiacente al corpo che può essere interamente o parzialmente laminare, all'interno del quali gli effetti viscosi sono importanti e valgono le equazioni di Navier Stokes. In maniera più rigida si distingue:
 - Strato limite laminare = in cui gli sforzi viscosi non sono trascurabili
 - Strato limite turbolento
2. Zona esterna allo strato limite, detto flusso libero, dove il fluido può essere considerato ideale e valgono quindi le equazioni di Eulero

Inoltre, possiamo affermare che esiste una zona a valle detta zona di separazione in cui la componente x della velocità è sia positiva che negativa. Identifichiamo inoltre dei punti detti punti di distacco o punti di separazione dove il flusso principale si separa dal corpo stesso.



Equazioni di strato limite

I risultati concettuali ottenuti possono essere generalizzati al caso di corpi tozzi in cui la dimensione dell'oggetto in direzione y è comparabile o addirittura maggiore di quella in direzione x . Svolgiamo ora in maniera più dettagliata un'analisi degli ordini di grandezza dei vari termini che compongono le equazioni di Navier-Stokes all'interno dello strato limite:

- Equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

- Equazione di bilancio della quantità di moto:

$$-\tilde{\nabla} \tilde{p}_e + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{v} \tilde{v})$$

Proiettiamo questa equazione nelle direzioni \tilde{y} e \tilde{x} :

$$-\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) = \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) = \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}$$

Riscriviamo queste equazioni mettendo in evidenza gli ordini di grandezza:

$$\tilde{u} = O(1) \quad \tilde{x} = O(1) \quad \tilde{y} = O(\delta) \quad \frac{1}{Re} = O(\delta^2)$$

$$\tilde{y}^2 = O(\delta^2) \quad \tilde{v} = O(\delta)$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} + O(\delta^2) \left(\frac{O(1)}{O(1)} + \frac{O(1)}{O(\delta^2)} \right) = O(1) \frac{O(1)}{O(1)} + O(\delta) \frac{O(1)}{O(\delta)}$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{y}} + O(\delta^2) \left(\frac{O(\delta)}{O(1)} + \frac{O(\delta)}{O(\delta^2)} \right) = O(1) \frac{O(\delta)}{O(1)} + O(\delta) \frac{O(\delta)}{O(\delta)}$$

Possiamo trascurare le grandezze di ordini $O(\delta^2)$ e $O(\delta^3)$ quindi otteniamo le equazioni parabolizzate di Navier Stokes:

$$-\frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$

$$-\frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} = \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}$$

Posiamo trascurare anche i termini $O(\delta)$ e otteniamo le equazioni di strato limite:

$$-\frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$

$$\frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{y}} = 0$$

Deduciamo che la pressione all'interno dello strato limite è pari a quella in corrispondenza dell'interfaccia con il flusso libero, all'interno del quale valgono le equazioni di Eulero. Per risolvere queste equazioni conviene ipotizzare di avere un fluido ideale.

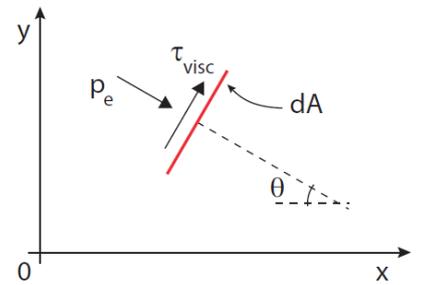
Drag e Lift

Vogliamo ora risolvere il problema tipicamente ingegneristico di determinare le forze e i momenti che un flusso esterno esercita su di un corpo immerso. Analizziamo per semplicità solo le forze e non i momenti.

Per prima cosa notiamo che le forze sono dovute al fatto che localmente, sulla superficie infinitesima dA , è presente p_e e lo sforzo tangenziale viscoso τ_{visc} . Una volta individuato l'orientamento della superficie possiamo scrivere la forza infinitesima esercitata lungo le due direzioni x e y :

$$dF_x = (p_e \cos \vartheta + \tau_{visc} \sin \vartheta) dA$$

$$dF_y = (-p_e \sin \vartheta + \tau_{visc} \cos \vartheta) dA$$



La risultante delle forze infinitesime nelle due direzioni si ottiene integrando le due forze infinitesime:

$$F_x = D = \int_A dF_x dA = \int_A (p_e \cos \vartheta + \tau_{visc} \sin \vartheta) dA = \int_A p_e \cos \vartheta dA + \int_A \tau_{visc} \sin \vartheta dA$$

$$F_y = L = \int_A dF_y dA = \int_A (-p_e \sin \vartheta + \tau_{visc} \cos \vartheta) dA = \int_A -p_e \sin \vartheta dA + \int_A \tau_{visc} \cos \vartheta dA$$

La risultante delle forze infinitesime lungo la direzione x prende il nome di Drag, cioè resistenza, e può essere vista come sommatoria di due contributi: uno dovuto alla distribuzione di pressione (drag di pressione o drag di forma) e una dovuta alla distribuzione degli sforzi tangenziali (drag d'attrito e drag viscoso). La risultante delle forze infinitesime lungo la direzione y prende invece il nome di Lift cioè portanza. Anche in questo caso abbiamo un contributo dovuto alla distribuzione di pressione e uno dovuto alla distribuzione degli sforzi tangenziale.

Chiaramente per determinare drag e lift di un corpo occorre conoscere la geometria dello stesso e la distribuzione delle pressioni e degli sforzi tangenziali.

Drag per fluidi ideali (teorema di D'Alambert)

Il drag per fluidi ideali è nullo perché entrambe le componenti lo sono. Ciò comporta che non sia possibile stabilire il verso del flusso indisturbato e quindi il fluido ideale non può esercitare forze nella direzione del flusso indisturbato. Questa conclusione prende il nome di teorema di D'Alambert.

Drag per fluidi reali

Come già accennato il drag per i fluidi reali dipende dalla geometria del corpo immerso, ma anche dalle proprietà del fluido come densità, viscosità e comprimibilità, dalla velocità del flusso indisturbato e dalla scabrezza superficiale:

$$D = f(\text{forma}, l, \rho, \mu, \epsilon, U, \mathcal{R})$$

Se usiamo la terna inerziale per adimensionalizzare il problema otteniamo il coefficiente di Drag cioè il gruppo pigreco associato con il drag:

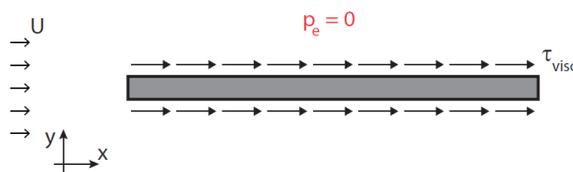
$$\Pi_D = C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = f'(\text{forma}, Re, Ma, \frac{\mathcal{R}}{l})$$

Analizziamo ora come nel caso di fluidi reali il coefficiente di Drag varia in funzione del numero di Reynolds per corpi affusolati e per i corpi tozzi:

- Corpi affusolati = vediamo ora come il coefficiente di drag dipende dalla scabrezza relativa e dal numero di Reynolds nel caso di corpi affusolati. Questo caso è rappresentato da una lastra piana di lunghezza l . In questo caso la il drag di pressione e dunque la forza di drag è dovuta solo al drag d'attrito. L'area che compare nella formula del coefficiente di drag sarà l'area della lastra quindi il prodotto tra la lunghezza e la profondità. Inoltre, se $Re < 1$ (si parla di flusso di Stokes) le inerzie non contano quindi né la densità né la scabrezza vanno considerate come variabili di controllo:

$$D = f(\text{forma}, l, \mu, U)$$

Usando la terna viscosa: $\frac{D}{\rho U l} = f''(\text{forma})$

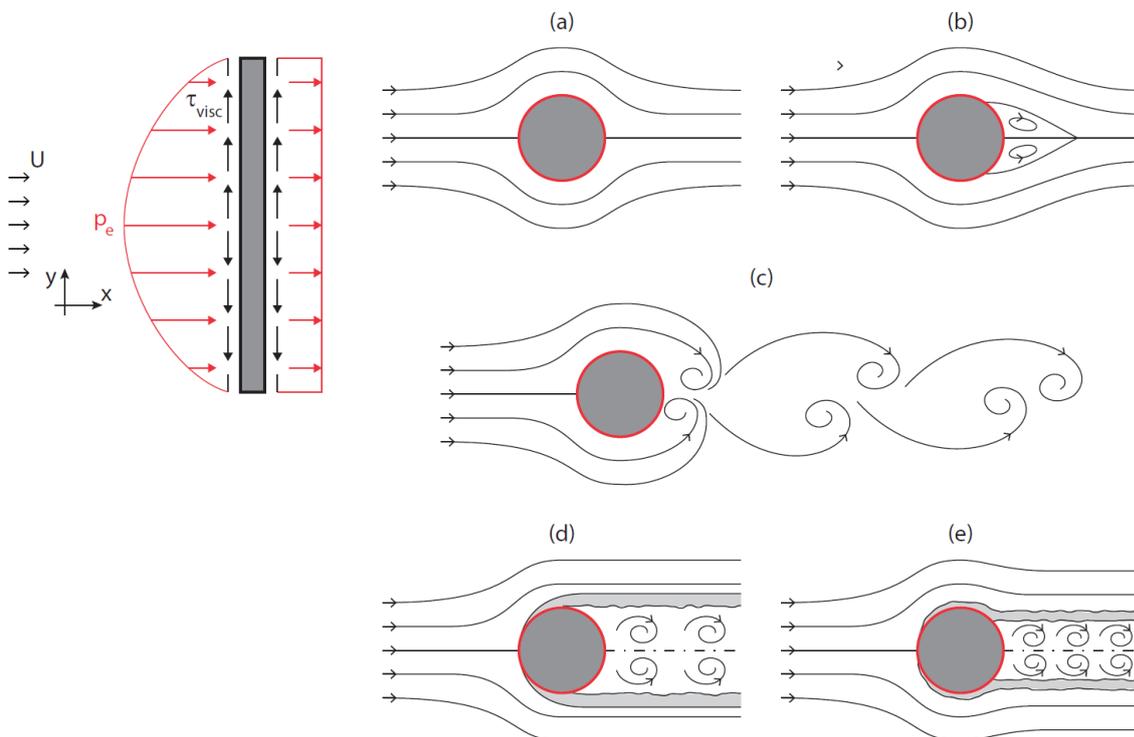


- Corpi tozzi = vediamo ora come il coefficiente di drag dipende dalla scabrezza relativa e dal numero di Reynolds nel caso di corpi tozzi. Il caso più estremo di corpo tozzo è rappresentato da una lastra posta perpendicolare al flusso. Notiamo subito che a valle della lastra il flusso si separa a causa degli spigoli vivi. La forza di drag in questo caso è dovuta solamente alle pressioni e non agli sforzi tangenziali. Il drag è dunque generato da una mancata simmetria nella distribuzione delle pressioni tra monte e valle del corpo, a sua volta associato con la separazione del flusso e la conseguente creazione di una zona di scia. La velocità è massima e quindi la pressione è minima in corrispondenza del massimo ingombro del corpo.

Prendiamo come esempi di corpo tozzo una sfera di diametro d investita da una corrente stazionaria e uniforme con velocità U :

- $Re < 1$ si parla ancora di flusso di Stokes. Il coefficiente di drag risulta essere inversamente proporzionale al numero di Re e la costante di proporzionalità dipende dalla forma del corpo tozzo. In questo caso non si verifica separazione

- $1 < Re < 50$ il flusso si separa dal corpo e si formano a valle del corpo due vortici a delta simmetrici e stazionari noti come bolle stazionarie
- $50 < Re < 10^3$ si forma la scia vorticoso oscillante di Karman che consiste nella formazione alternata di vortici controrotanti a valle del corpo in corrispondenza del quadrante superiore e inferiore
- $10^3 < Re < 10^5$ si crea attorno al corpo uno strato limite laminare che si separa dalla sfera più o meno in corrispondenza della sezione di massimo ingombro. A valle del corpo è presente una scia turbolenta all'interno della quale la pressione si mantiene circa uniforme
- $Re \cong 10^5$ vi è transizione da strato limite laminare a turbolento. La separazione viene più a valle rispetto allo strato limite laminare. Una volta avvenuta la transizione il coefficiente di drag aumenta con il numero di Reynolds fino a saturare quando la scabrezza è interamente emersa dal substrato limite viscoso: il coefficiente di drag diventa auto simile rispetto a Re .



Analizziamo ora come nel caso di fluidi reali il coefficiente di Drag varia in funzione del numero di Mach, fino ad ora abbiamo ipotizzato di avere numero di Mach inferiore di 0.3 così da avere autosimilarità e dunque eliminare la dipendenza del gruppo pigreco associato al drag dalla comprimibilità stessa. Consideriamo ora il caso in cui mach è maggiore di 0.3. man mano che il numero di Mach aumenta occorre tener presente anche del drag di pressione.

Lift

Anche nel caso di lift si può utilizzare la terna inerziale per adimensionalizzare il problema; in questo modo si ottiene il coefficiente di Lift cioè il gruppo pigreco associato con il lift:

$$\Pi_L = C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$