Equazioni di diffusione: l'equazione del calore

Problema di diffusione	$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
Problema di diffusione-reazione	$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u - u_0)$
Problema di diffusione con generazione di calore	$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$
Problema di diffusione-trasporto	$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + vu$
Problema di diffusione-trasporto-reazione	$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u = 0$
	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$ $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left[\mu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \sigma + \frac{v^2}{2\mu}\right]t} e^{\frac{v}{2\mu}x}$

Affinché abbia senso parlare di problemi di diffusione occorre accompagnare sempre le equazioni sopra scritte con le condizioni al contorno (sono due e derivano dal fatto che integrando due volte $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ si hanno due costanti) e condizioni inziali (è una deriva dall'integrazione di $\frac{\partial u}{\partial t}$). Vediamo dunque quali possono essere le diverse condizioni al contorno e come si risolvono le equazioni

Condizioni di Cauchy-Dirichlet	Omogeneo	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$
		$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nx)\, e^{-\mu n^2 t}$ $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\sin(nx)\, dx$

<table>
<tr>
<td rowspan="2"></td>
<td rowspan="2">Non omogeneo</td>
<td>$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = g_1 \\ u(L,t) = g_2 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Risolvo riconducendomi a un sistema omogeneo:

$$u(x,t) = u_s(t) + \overline{u}(t)$$

$$u_s(t) = g_1 + (g_2 - g_1)\frac{x}{L}$$

$$\overline{u}(t) = \overline{\phi}(x) = \phi(x) - u_s(t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} \\ \overline{u}(0,t) = 0 \\ \overline{u}(L,t) = 0 \\ \overline{u}(x,0) = \overline{\phi}(x) \end{cases}$$

$$\overline{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nx)\, e^{-\mu n^2 t}$$

$$\overline{A_n} = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Condizioni di Neuman</td>
<td rowspan="2">omogeneo</td>
<td>$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>$$u(x,t) = H_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n \cos(nx)\, e^{-n^2 t}$$

$$H_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L \phi(x) dx$$

Per calcolare H_n occore usare uno stratagemma e quindi si applicano le condizioni iniziali alla soluzione dipendente da H_n e la si impone uguale a $\phi(x)$ come suggerisce la quarta equazione del sistema (il trucco sta nello sviluppare le funzioni in modo da avere $\cos(nx)$), si determinano cosi i valori di H_n che dipendono da n:

$$sviluppo\ di\ \phi(x) = H_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n \cos(nx)$$</td>
</tr>
</table>

Calcolo numerico dei coefficienti di Fourier

Se si vogliono calcolare i coefficienti di Fourier data una funzione $f(x)$ occorre per prima cosa riscrivere la funzione come somma di due funzioni $f(x)$: una pari p(x) (simmetrica rispetto all'asse delle y) e una $d(x)$ dispari (simmetrica rispetto l'origine):

$$f(x) = p(x) + d(x)$$

Le due funzioni pari e dispari possono essere calcolate come segue e procedere calcolandola prima i nodi e poi con la funzione di Matlba dct o dst:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{p} = p\left(\frac{\pi(2n-1)}{2N}\right) \quad \rightarrow \quad \tilde{p} = dct(\overline{p})$$

$$d(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{d} = d\left(\frac{\pi n}{N+1}\right) \quad \rightarrow \quad \tilde{d} = dst(\overline{d})$$

A questo punto i coefficienti possono essere calcolati in questo modo:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\sqrt{N}}\tilde{p}(1) & \\ a_n = \sqrt{\dfrac{2}{N}}\tilde{p}(i) & i = 2{:}\,N-1 \\ b_n = \dfrac{2}{N+1}\tilde{d}(i) & i = 1{:}\,N \end{cases}$$

Si ricorda che N è il numero dei coefficienti che si vuole calcolare e n è un valore che va da 1 a N.

Vediamo ora come utilizzare il calcolo dei coefficienti di Fourier per risolvere le equazioni di diffusione del calore:

Condizioni di Cauchy-Dirichlet omogenee

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nx)\, e^{-\mu n^2 t}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\sin(nx)\,dx$$

```
%scrivo la funzione ϕ(x) e i nodi in cui è definita, per comodità uso la funzione di Matlab tra gli estremi del dominio (in questo esempio, pi e 0. Scrivo anche N ovvero il numero dei coefficienti che si vuole calcolare e t ovvero l'istante temporale fissato nell'ultima equazione del sistema, in questo caso t=0. Plotto poi il grafico della funzione per capire se è una funzione pari o dispari

f = @(x) sin(x)+0.5*sin(2*x)+0.2*sin(5*x);
xdis = linspace(0,pi,1000);
N = 100;
t = 0;
plot(xdis,f(xdis))
grid on

%dal grafico noto che la funzione non è né pari né dispare quindi la prolungo nell'intervallo -pi;pi così da ottenere una funzione che possa essere sviluppata in serie di Fourier

f = @(x) sin(x)+0.5*sin(2*x)+0.2*sin(5*x);
x = linspace(-pi,pi,1000);
plot(x,f(x))
grid on
```

	%ottengo così un grafico dispari e posso ora applicare la procedura per il calcolo dei coefficienti di Fourier su una funzione dispari
	
	n = 1:N;
	d_sopr = f(pi*n/(N+1));
	d_tilde = dst(d_sopr);
	an = 2/(N+1)*d_tilde;
	
	%applico poi le condizioni iniziali ovvero $u(0,t) = 0$ e con un ciclo for calcolo poi la soluzione e plotto il risultato
	
	u = 0;
	for i = n
	    u1 = u1 + bn(i).*exp(-i.^2*t1).*sin(i*xdis);
	end
	figure(1)
	plot(xdis,f(xdis), 'ko', xdis, u1, 'r')

Metodo dell'energia per dimostrare unicità della soluzione del problema di diffusione

Enunciato: la soluzione al problema di diffusione esiste ed è unica

Dimostrazione: Per dimostrare ciò procediamo per assurdo e dunque ipotizziamo che esistano due soluzioni distinte $u(x,t)$ e $w(x,t)$ al problema di diffusione con condizioni al contorno Cauchy-Dirichlet. Essendo distinte è possibile calcolarne la differenza e stabilire così una nuova funzione:

$$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$$

Definiamo ora il nuovo problema di diffusione:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,t) = 0 \\ v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) \end{cases}$$

Prendiamo la prima equazione del sistema e moltiplichiamola a destra e a sinistra per la stessa funzione $v(x,t)$ e integriamo poi sulla lunghezza:

$$v\frac{\partial v}{\partial t} = v\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\int_0^L v\frac{\partial v}{\partial t}dx = \int_0^L v\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx$$

Analizziamo ora separatamente i due termini dell'equazione, partendo dal primo. Mediante una serie di passaggi matematici è possibile ricondursi all'espressione dell'energia nel tempo. Tale valore può dunque essere solo maggiore o tuttalpiù uguale a 0:

$$\int_0^L v\frac{\partial v}{\partial t}dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^L \frac{v^2}{2}dx = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_0^L v^2\,dx = \frac{\partial}{\partial t}E(t) \geq 0$$

Sviluppiamo ora il secondo termine integrandolo per parti, è possibile notare che il primo termine si annulla mentre il secondo altro non è anch'esso che la derivata parziale dell'energia. A causa del meno però questo termine può solo essere negativo o tuttalpiù uguale a 0:

$$\int_0^L v\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \mu \int_0^L v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx =$$

$$= \mu \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx - \mu \int_0^L \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dx =$$

$$= \mu \left[v(L,t)\frac{\partial v}{\partial x}(L,t) - v(0,t)\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)\right] - \mu \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx =$$

$$= 0 - \mu \frac{\partial}{\partial t} E(t) \leq 0$$

Affinché valga l'uguaglianza occorre l'energia sia nulla dunque essendo $E(t) = 0$ allora si avrà che $v(x,t) = 0$ e quindi $u(x,t) = w(x,t)$ è dunque dimostrata l'unicità della soluzione.

Problema di diffusione in dimensione spaziali $d > 1$	
Problema di Cauchy-Dirichlet	$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu \Delta v \\ (\vec{x},t) = g(\vec{x},t) \\ v(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$
Problema di Cauchy-Robin	$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu \Delta v \\ -\mu \overline{\nabla} u \cdot \hat{n} - \alpha u = h \\ u(\vec{x},t) = \phi(\vec{x}) \end{cases}$
Problema di Cauchy-Neumann	$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu \Delta v \\ -\mu \overline{\nabla} u \cdot \hat{n} = h \\ u(\vec{x},t) = \phi(\vec{x}) \end{cases}$
Problema di Cauchy misto	$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu \Delta v \\ u = g \\ -\mu \overline{\nabla} u \cdot \hat{n} = h \\ u(\vec{x},t) = \phi(\vec{x}) \end{cases}$

Teorema di esistenza e unicità della soluzione di problemi di diffusione in dimensione spaziale maggiore di 1 e Unicità della soluzione di problemi di diffusione in dimensione spaziale maggiore di 1 tramite metodo dell'energia (metodo integrale)

Enunciato: la soluzione al problema di diffusione in dimensione spaziale maggiore di uno esiste ed è unica

Dimostrazione: Per dimostrare ciò procediamo per assurdo e dunque ipotizziamo che esistano due soluzioni distinte $u(\vec{x},t)$ e $w(\vec{x},t)$ al problema di diffusione in dimensione spaziale maggiore di uno. Essendo distinte è possibile calcolarne la differenza e stabilire così una nuova funzione:

$$v(\vec{x},t) = u(\vec{x},t) - w(\vec{x},t)$$

Definiamo ora il nuovo problema di diffusione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu\Delta v \\ (\vec{x},t) = g(\vec{x},t) \\ v(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$$

Prendiamo la prima equazione del sistema e moltiplichiamola a destra e a sinistra per la stessa funzione $v(\vec{x},t) = 0$e integriamo poi Ω:

$$v\frac{\partial v}{\partial t} = v\mu\Delta v$$

$$\int_\Omega v\frac{\partial v}{\partial t}d\Omega = \int_\Omega v\mu\Delta v d\Omega$$

Analizziamo ora separatamente i due termini dell'equazione, partendo dal primo. Mediante una serie di passaggi matematici è possibile ricondursi all'espressione dell'energia nel tempo. Tale valore può dunque essere solo maggiore o tuttalpiù uguale a 0:

$$\int_\Omega v\frac{\partial v}{\partial t}d\Omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{v^2}{2}d\Omega = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_\Omega v^2 d\Omega = \frac{\partial}{\partial t}E(t) \geq 0$$

Sviluppiamo ora il secondo termine integrandolo per parti, notiamo che questo termine può solo essere negativo o tuttalpiù uguale a 0:

$$\int_\Omega v\mu\Delta v d\Omega = \mu\int_\Omega v\Delta v d\Omega = \mu\int_\Omega v\left(\vec{\nabla}v\cdot\vec{\nabla}v\right)d\Omega =$$

$$= \mu\oint_{\partial\Omega} v\vec{\nabla}v\cdot\hat{n}\, d\partial\Omega - \mu\int_\Omega \vec{\nabla}v\cdot\vec{\nabla}v\, d\Omega =$$

$$= \mu\oint_{d\Gamma} v\vec{\nabla}v\cdot\hat{n}\, d\Gamma - \mu\int_\Omega \vec{\nabla}v\cdot\vec{\nabla}v\, d\Omega \leq 0$$

Affinché valga l'uguaglianza occorre l'energia sia nulla dunque essendo $E(t) = 0$ allora si avrà che $v(\vec{x},t) = 0$ e quindi $u(\vec{x},t) = w(\vec{x},t)$ è dunque dimostrata l'unicità della soluzione.