

# TURBOLENZA

## Introduzione

Abbiamo fino ad ora analizzato praticamente solo il caso di moto laminare, tale regime di moto è però estremamente raro, al contrario, invece del moto turbolento. Anche nel moto turbolento sono valide le equazioni di Navier Stokes, la difficoltà è insita nella risoluzione di tali equazioni. Nel caso, infatti di moto turbolento non è più possibile eliminare i termini inerziali e ciò impedisce di trovare soluzioni analitiche anche in presenza di geometrie semplici. L'alternativa più utilizzata è quella di risolvere numericamente le equazioni differenziali. Risolvere numericamente un'equazione significa:

1. Identificare un numero finito di punti del dominio geometrico di interesse  $N_s$ , detti nodi della griglia spaziale
2. Identificare un numero finito di istanti temporali  $N_t$ , detti nodi della griglia temporale
3. Risolvere in corrispondenza di questi punti le  $4 * N_s * N_t$  equazioni algebriche in cui sono state trasformate le 4 equazioni differenziali di partenza di Navier-Stokes.

Nel nostro studio siamo interessati non tanto ai metodi risolutivi quanto piuttosto all'opportuna scelta dei nodi di griglia spaziale e temporale, o equivalentemente di scegliere il passo di griglia. Per comodità pensiamo al moto turbolento in condotte cilindriche in modo che invece di conoscere nel dettaglio le linee di corrente istante per istante è sufficiente avere un'idea di come in media si comporta il flusso.

## TURBOLENZA: equazione di Reynolds

### Media e decomposizione alla Reynolds

Per parlare delle equazioni di Reynolds occorre comprendere cosa sia la media alla Reynolds: è una media temporale a finestra mobile di una qualsiasi grandezza:

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \xi dt$$

Avendo definito il concetto di media si può esprimere il valore istantaneo della generica grandezza  $\xi$  come somma del valore medio e di una fluttuazione turbolenta attorno alla media:

$$\xi = \langle \xi \rangle + \xi'$$

Questa operazione prende il nome decomposizione di Reynolds. Tali fluttuazioni sono viste come disturbi da eliminare nell'ottica di una soluzione ingegneristica dei flussi turbolenti, infatti la media di queste fluttuazioni risulta essere nulla:

$$\langle \xi' \rangle = \langle \xi - \langle \xi \rangle \rangle = \langle \xi \rangle - \langle \xi \rangle = 0$$

La scelta dell'intervallo temporale rispetto a cui calcolare la media di Reynolds non è universale in quanto varia in funzione del problema in esame. Inoltre, l'intervallo  $T$  deve essere:

- Abbastanza ampio da eliminare le non-stazionarietà dovute alle turbolenze
- Abbastanza piccolo da fare in modo che la media sia comunque influenzata da eventuali non-stazionarietà di grande scala dovuto alle condizioni al contorno

### Bilancio di massa indefinito per turbolenza

Rivediamo ora il bilancio di massa, o l'equazione di continuità, considerando le definizioni appena date. L'unica differenza è che nel bilancio di massa dell'equazione di Navier-Stokes si ha il campo di moto istantaneo  $\vec{v}$  mentre in questo caso si ha il campo di moto medio  $\langle \vec{v} \rangle$ :

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0$$

$$\langle \nabla \cdot \bar{v} = 0 \rangle$$

$$\nabla \cdot \langle \bar{v} \rangle = 0$$

Applicando la decomposizione di Reynolds si nota che il campo di moto fluttuante ha divergenza nulla e quindi è isocoro:

$$\nabla \cdot \bar{v} = \nabla \cdot (\langle \bar{v} \rangle + \bar{v}') = \nabla \cdot \langle \bar{v} \rangle + \nabla \cdot \bar{v}' = \nabla \cdot \bar{v}' = 0$$

### Bilancio di massa globale per turbolenza

Rivediamo ora il bilancio di massa globale e scopriamo che, la portata media entrante è uguale a quella che esce dal contorno del volume di controllo (l'equazione è infatti uguale a 0):

$$\int_W \nabla \cdot \langle \bar{v} \rangle dW = 0$$

$$\int_W \nabla \cdot \langle \bar{v} \rangle dW = - \int_A \langle \bar{v} \rangle \hat{n} dA = 0$$

### Bilancio di quantità di moto indefinito per turbolenza

Applichiamo ora l'operatore media di Reynolds all'equazione di bilancio della quantità di moto in forma conservativa e notiamo che abbiamo due fattori: il primo che rappresenta le inerzie convettive del moto medio e uno che invece rappresenta le inerzie convettive associate con le fluttuazioni di velocità e coincide con la divergenza del tensore degli sforzi di Reynolds che rappresenta lo sforzo turbolento:

$$\langle -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho g \nabla \bar{z} = \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v} \bar{v}) \rangle$$

$$-\nabla \langle p \rangle + \mu \nabla^2 \langle \bar{v} \rangle - \rho g \nabla \bar{z} = \frac{\partial(\rho \langle \bar{v} \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{v} \bar{v} \rangle)$$

$$\nabla \cdot (\rho \langle \bar{v} \bar{v} \rangle) = \nabla \cdot (\rho (\langle \bar{v} \rangle + \bar{v}') (\langle \bar{v} \rangle + \bar{v}')) = \nabla \cdot (\rho \langle \bar{v} \rangle \langle \bar{v} \rangle) + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{v}' \bar{v}' \rangle)$$

$$\nabla \cdot (\rho \langle \bar{v}' \bar{v}' \rangle) = \nabla \cdot \overline{\Phi_{Re}}$$

$$-\nabla \langle p \rangle + \mu \nabla^2 \langle \bar{v} \rangle - \rho g \nabla \bar{z} = \frac{\partial(\rho \langle \bar{v} \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{v} \rangle \langle \bar{v} \rangle) + \nabla \cdot \overline{\Phi_{Re}}$$

### Bilancio di quantità di moto globale per turbolenza

Applichiamo ora l'operatore media di Reynolds all'equazione di bilancio della quantità di moto in forma globale e notiamo che il flusso della quantità di moto M può essere scomposto in una grandezza  $\overline{M_m}$  che rappresenta il flusso di quantità di moto medio e una grandezza  $\overline{M'}$  che rappresenta invece il flusso di quantità di moto turbolento dovuto alle componenti di agitazione:

$$\langle \overline{\Pi_p} \rangle + \langle \overline{\Pi_\mu} \rangle + \bar{G} + \langle \bar{I} \rangle + \langle \overline{M} \rangle = \bar{0}$$

$$\langle \bar{I} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho \langle \bar{v} \rangle dW$$

$$\langle \overline{\Pi_p} \rangle = - \int_A \langle p \rangle \hat{n} dA$$

$$\langle \overline{\Pi_\mu} \rangle = - \int_A \mu \frac{\partial \langle \bar{v} \rangle}{\partial n} dA$$

$$\langle \bar{M} \rangle = \overline{M_m} + \bar{M}'$$

$$\langle \overline{\Pi_p} \rangle + \langle \overline{\Pi_\mu} \rangle + \bar{G} + \langle \bar{I} \rangle + \overline{M_m} + \bar{M}' = \bar{0}$$

### Equazioni di Reynolds

Definite dunque l'equazione di continuità e il bilancio di quantità di moto per la turbolenza sia in forma indefinita che in forma globale è possibile dunque scrivere le equazioni di Reynolds, dette anche equazione RANS. La forma indefinita è:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho \langle \bar{v} \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{v} \rangle \langle \bar{v} \rangle) = -g\rho \nabla \bar{z} + \mu \nabla^2 \langle \bar{v} \rangle - \nabla \cdot \bar{\Phi}_{Re} \\ \nabla \langle \bar{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

Mentre quella globale è:

$$\begin{cases} \langle \bar{I} \rangle + \overline{M_m} + \bar{M}' + \bar{G} + \langle \overline{\Pi_p} \rangle + \langle \overline{\Pi_\mu} \rangle = \bar{0} \\ \int_W \nabla \cdot \langle \bar{v} \rangle dW = - \int_A \langle \bar{v} \rangle \cdot \hat{n} dA \end{cases}$$

Le equazioni di Reynolds, al contrario di quelli di Navier-Stokes non sono equazioni chiuse perché, ad esempio, il tensore degli sforzi di Reynolds che viene introdotto nel bilancio di quantità di moto indefinita introduce 6 ulteriori incognite. Per risolvere tali equazioni occorre dunque fornire ulteriori informazioni aggiuntive. Il problema di fornire queste informazioni prende il nome di problema di chiusura della turbolenza.

### Chiusura della turbolenza

Il problema della chiusura della turbolenza consiste nel trovare una relazione tra gli sforzi di Reynolds e le caratteristiche del moto. Esistono diversi modelli di chiusura per risolvere le equazioni di Reynolds e il problema della turbolenza:

- Modelli di chiusura agli sforzi di Reynolds completi
- Modelli di chiusura più semplici che possono essere usati solo se la turbolenza non è anisotropa. Questi modelli più semplici si basano sull'ipotesi di Boussinesq. Per questa ipotesi il tensore di Reynolds ha la stessa forma della reologia dei fluidi newtoniani (per analogia:

$$p = \frac{tr(\bar{\Phi})}{3}$$

$$\mu = \rho \nu$$

$$\bar{\Phi} = \left( p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \bar{v} \right) \bar{I} - 2\mu \bar{D} = \left( p + \frac{2}{3} \rho \nu \nabla \cdot \bar{v} \right) \bar{I} - 2\rho \nu \bar{D}$$

$$\overline{\Phi}_{Re} = \left( \frac{tr(\overline{\Phi}_{Re})}{3} + \frac{2}{3} \rho \nu_{turb} \nabla \cdot \langle \bar{v} \rangle \right) \bar{I} - 2\rho \nu_{turb} \langle \bar{D} \rangle$$

Questa relazione sposta il problema sulla viscosità turbolenta che risulta essere un'incognita perché varia a seconda della posizione del flusso. La viscosità turbolenta è

dimensionalmente pari al prodotto tra una velocità e una lunghezza; quindi se si riescono a individuare la velocità scala e una lunghezza scala si può stimare la viscosità turbolenta. I modelli di viscosità turbolenta si differenziano in base alla scelta di queste due grandezze scala e sul tipo di equazioni da risolvere per ottenerle:

- Modelli a 0 equazioni (presentano 2 espressioni algebriche non lineari)
- Modelli a 1 equazione (presentano un'equazione algebrica e una differenziale)
- Modelli a 2 equazioni (presentano 2 equazioni differenziali)

Prima di studiare dei possibili metodi numerici per la soluzione al problema di chiusura applichiamo le equazioni di Reynolds a un caso semplice: il moto in condotta.

### Applicazione del moto turbolento in condotta

Analizziamo ora il moto di un fluido in regime turbolento in una condotta a sezione circolare di diametro  $D$ . Suddividiamo la superficie di contorno del volume di controllo in due superfici piane 1,2, coincidenti con le basi del cilindro, e una superficie curva 0, corrispondente con quella laterale. Appliciamo dunque l'equazione del bilancio di quantità di moto in forma globale per il regime turbolento:

$$\langle \overline{\Pi_p} \rangle + \langle \overline{\Pi_\mu} \rangle + \overline{G} + \langle \overline{I} \rangle + \overline{M_m} + \overline{M}' = \overline{0}$$

$$\langle \overline{\Pi_{p,0}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{p,1}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{p,2}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{\mu,1}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{\mu,2}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{\mu,0}} \rangle + \overline{G} + \langle \overline{I} \rangle + \overline{M_{m,1}} + \overline{M}'_1 + \overline{M_{m,2}} + \overline{M}'_2 + \overline{M_{m,0}} + \overline{M}'_0 = \overline{0}$$

Possiamo notare che:

- La risultante delle inezie locali medie è nulla perché il problema è stazionario in media:  $\langle \overline{I} \rangle = \overline{0}$
- Il flusso di quantità di moto medio attraverso la superficie laterale è nullo per il versore e il vettore velocità sono tra loro perpendicolari e quindi il loro prodotto è nullo:  $\overline{M}'_1 + \overline{M}'_2 = \overline{0}$
- La somma dei due flussi di quantità di moto medio attraverso le due superfici piane è nulla:  $\overline{M_{m,1}} + \overline{M_{m,2}} = \overline{0}$
- Il flusso di quantità di moto turbolenti attraverso la superficie laterale è nullo:  $\overline{M_{m,0}} = \overline{0}$
- La risultante degli sforzi viscosi medi sulla superficie piana 1 risulta nulla visto che per continuità la dritta della velocità media in direzione  $x$  è ovunque nulla:  $\langle \overline{\Pi_{\mu,1}} \rangle = \overline{0}$
- La risultante degli sforzi viscosi medi sulla superficie piana 2 risulta nulla visto che per continuità la dritta della velocità media in direzione  $x$  è ovunque nulla:  $\langle \overline{\Pi_{\mu,2}} \rangle = \overline{0}$

Ottengo dunque un'equazione che proietto poi lungo l'asse  $x$ :

$$\langle \overline{\Pi_{p,0x}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{p,1x}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{p,2x}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{\mu,0x}} \rangle + \overline{G_x} + \overline{M'_{0x}} = \overline{0}$$

$$\langle \overline{\Pi_{p,0x}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{p,1x}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{p,2x}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{\mu,0x}} \rangle + \overline{G_x} + \overline{M'_{0x}} = \overline{0}$$

$$\langle \overline{\Pi_{p,0x}} \rangle = \overline{0}$$

$$\langle \overline{\Pi_{p,1x}} \rangle = \langle p_1 \rangle \pi r^2 \hat{i}$$

$$\langle \overline{\Pi_{p,2x}} \rangle = -\langle p_2 \rangle \pi r^2 \hat{i}$$

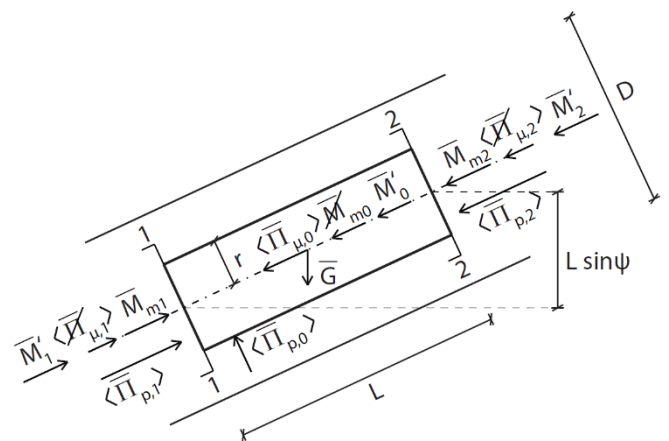
$$\langle \overline{\Pi_{\mu,0x}} \rangle = -\tau_{visc} 2\pi r L \hat{i}$$

$$\overline{G_x} = -\gamma \pi r^2 L \sin \psi \hat{i}$$

$$\overline{M'_{0x}} = -\tau_{turb} 2\pi r L \hat{i}$$

$$\langle \overline{\Pi_{p,0x}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{p,1x}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{p,2x}} \rangle + \langle \overline{\Pi_{\mu,0x}} \rangle + \overline{G_x} + \overline{M'_{0x}} = \overline{0}$$

$$\langle p_1 \rangle \pi r^2 - \langle p_2 \rangle \pi r^2 - \tau_{visc} 2\pi r L - \gamma \pi r^2 L \sin \psi - \tau_{turb} 2\pi r L = \overline{0}$$



$$\langle p_1 \rangle \pi r^2 - \langle p_2 \rangle \pi r^2 - \gamma \pi r^2 L \sin \psi = \tau_{visc} 2\pi r L + \tau_{turb} 2\pi r L$$

$$L \sin \psi = \tilde{z}_2 - \tilde{z}_1$$

$$\langle p_1 \rangle \pi r^2 - \langle p_2 \rangle \pi r^2 - \gamma \pi r^2 (\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) = 2\pi r L (\tau_{visc} + \tau_{turb})$$

$$\langle p_1 \rangle \pi r^2 - \langle p_2 \rangle \pi r^2 - \gamma \pi r^2 \tilde{z}_2 + \gamma \pi r^2 \tilde{z}_1 = 2\pi r L (\tau_{visc} + \tau_{turb})$$

$$\gamma \pi r^2 \left[ \left( \tilde{z}_1 + \frac{\langle p_1 \rangle}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_2 + \frac{\langle p_2 \rangle}{\gamma} \right) \right] = 2\pi r L (\tau_{visc} + \tau_{turb})$$

$$\left[ \left( \tilde{z}_1 + \frac{\langle p_1 \rangle}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_2 + \frac{\langle p_2 \rangle}{\gamma} \right) \right] = JL$$

$$\gamma \pi r^2 JL = 2\pi r L (\tau_{visc} + \tau_{turb})$$

$$\gamma r J = 2(\tau_{visc} + \tau_{turb})$$

$$\tau_{visc} + \tau_{turb} = \frac{\gamma r J}{2}$$

Questa equazione indica che lo sforzo tangenziale totale, somma di quello viscoso e di quello turbolento, è distribuito linearmente con la coordinata radiale: è nullo in corrispondenza dell'asse e massimo in corrispondenza della parete della condotta. Ricordandoci che lo sforzo viscoso e quello turbolento possono essere scritti nel seguente modo si ottiene:

$$\mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial r} - \rho \langle u' v_r' \rangle = -\frac{\gamma r J}{2}$$

### Paradosso e velocità frattale

L'esempio illustrato precedentemente ci permette di mettere in evidenza un paradosso che mise a dura prova l'idea stessa di meccanica del continuo. Infatti, sostituendo alla cadente energetica media la formula di Darcy-Weisbach e adimensionalizzando il problema si può ottenere la seguente equazione:

$$\frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right\rangle - \langle \tilde{u}' \tilde{v}_r' \rangle = -\frac{\lambda}{4} \tilde{r}$$

Analizzando l'equazione qui scritta notiamo che se  $Re \rightarrow \infty$  il primo termine (sforzo viscoso) sembrerebbe tendere a 0 mentre il termine a destra dell'uguale (termine dissipativo) è diverso da 0 e anzi tende a un valore all'infinito perché per  $Re \rightarrow \infty$  l'indice di resistenza  $\lambda \rightarrow \lambda_\infty$  che è diverso da 0, il problema è che l'unico termine che rimane cioè lo sforzo turbolento non è un termine dissipativo ma un termine cinetico (che ha origine dai termini inerziali dell'equazione di bilancio di quantità di moto); il paradosso nasce dal fatto che quando la turbolenza è infinta la dissipazione viscosa e quindi le perdite energetiche, sembrerebbero doversi annullarsi in contrasto con i risultati sperimentali. Dunque, che sembra che per  $Re \rightarrow \infty$  gli sforzi viscosi non ci siano ma le dissipazioni rimangono, l'unica soluzione a questo problema è riconoscere che la derivata della velocità  $\left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right\rangle$  deve dipendere dal numero di Reynolds e deve tendere a infinito in modo tale il prodotto tra  $\infty$  e  $1/\infty$  non tenda a zero. Una funzione  $u$  che è continua ma che ha

derivata infinita è detta frattale. Per tanto l'unica soluzione è che  $u$  sia una funzione matematica molto particolare la cui derivata tenda ad infinito. Dunque, il campo di velocità in condizione di turbolenza è un frattale.

$$Re \rightarrow \infty \quad \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right\rangle \rightarrow 0$$

$$Re \rightarrow \infty \quad \lambda \rightarrow \lambda_\infty \neq 0$$

Definendo la velocità come un frattale si può comprendere meglio il campo di moto: indipendentemente dalla scala scelta per osservare un certo istante temporale del campo di moto si riconosce una struttura turbolenta costituita da linee di corrente che è statisticamente simile ad altre scale di turbolenza.



### Cascata energetica

Studiando le gerarchie multi-scala di strutture turbolente si può ipotizzare e poi dimostrare che le strutture turbolente più piccole ricevono energia cinetica da quelle immediatamente più grandi e così via praticamente senza dissipazioni di energia, con un meccanismo che prende il nome di cascate energetiche, fino ad arrivare a strutture così piccole per cui la viscosità è in grado di dissipare tutto l'energia cinetica trasformandola in calore. In cima a tutto ciò c'è il moto medio. Dal concetto di cascata energetica segue che le strutture turbolente devono essere necessariamente minori della lunghezza integrale  $L$  del dominio geometrico in considerazione e maggiori di una lunghezza  $\eta$  detta lunghezza di Kolmogorov in corrispondenza della quale la viscosità è dominante. La lunghezza di Kolmogorov vale circa (dove  $Re_L$  è il numero di Reynolds del moto medio):

$$Re_L^{-\frac{3}{4}}$$

### Soluzioni numeriche del moto turbolento: metodi DNS

Come già accennato in precedenza per risolvere il moto turbolento occorre determinare il passo di griglia necessario per la soluzione numerica. Il primo metodo numerico che studiamo è il metodo DNS.

I metodi DNS sono metodi numerici che risolvono il moto turbolento discretizzando le equazioni di Navier Stokes. Si risolvono direttamente tutte le scale turbolente della cascata energetica senza modellare alcunché. In questo modello il numero totale dei nodi della griglia spazio-temporale necessari per una corretta soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes in condizioni turbolente è proporzionale a  $Re_L^3$ :

- $N_s = Re_L^{9/4}$
- $N_t = Re_L^{3/4}$

Metodi DNS → si risolvono direttamente tutte le scale turbolente della cascata energetica senza modellare alcunché

### Soluzioni numeriche del moto turbolento: metodi RANS

Se la soluzione diretta delle equazioni di Navier-Stokes in condizioni turbolente è impraticabile si può pensare di risolvere le equazioni di Reynolds. I metodi RANS sono numerici che risolvono

il moto turbolento risolvendo le equazioni di Reynolds. Si risolve solo il moto medio e si modella tutta la turbolenza. Presenta una serie di vantaggi computazionali rispetto al metodo DNS come ad esempio la possibilità di scegliere un passo di griglia abbastanza piccolo da garantire la stabilità numerica durante l'integrazione e consentire allo stesso tempo di ottenere una descrizione sufficientemente dettagliata del campo di moto e di pressione medio. Presenta però anche degli svantaggi come la necessità di modellizzare la turbolenza stessa (pdf)

Metodi RANS → si risolve solo il moto medio e si modella tutta la turbolenza.

### **Soluzioni numeriche del moto turbolento: metodi LES**

Sono metodi numerici che di fatto è un compromesso tra i metodi DNS e i metodi RANS perché risolve tutta la turbolenza ma con i vantaggi computazionali dei RANS. Tecnicamente si applica un filtro passa-basso alle equazioni di Navier Stokes.