EDO del 1° ordine

Equilibrio stabile: $\overline{y}$ è punto di equilibrio stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; se \quad |y_0 - \overline{y}| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |y(t) - \overline{y}| < \varepsilon \quad \forall t \in I$$

Equilibrio instabile: $\overline{y}$ è punto di equilibrio instabile se non è stabile

Definizione problema di Cauchy: consideriamo un intervallo $I = (t_0, t_f)$ si chiama problema di Cauchy o problema ai valori iniziali il seguente sistema:

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Esistenza e unicità locale della soluzione: sia f una funzione generica di due argomenti definita in $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se valgono le 2 ipotesi che faremo a breve allora esiste ed è unica la soluzione $y(t)$ al problema di Cauchy piccolo tale che $y \in C^1(\tilde{J})$ dove $\tilde{J}$ è intorno di t_0. Le due ipotesi sono:

1. La funzione f è continua in entrambi gli argomenti
2. La funzione è localmente lipschitz continua nel secondo argomento ovvero:
$$\exists L > 0 : \; |f(t, y_1) - f(t, y_2)| < L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \Sigma \text{ e } \; \forall t \in J$$
dove Σ è un intorno di y_0 e J è un intorno di t_0

Esistenza e unicità globale della soluzione: sia f una funzione generica di due argomenti definita in $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se valgono le 2 ipotesi che faremo a breve allora esiste ed è unica la soluzione $y(t)$ al problema di Cauchy tale che $y \in C^1(I)$. Le due ipotesi sono:

1. La funzione f è continua in entrambi gli argomenti
2. La funzione è lipschitz continua nel secondo argomento $\forall t \in I$ ovvero:
$$\exists L > 0 : \; |f(t, y_1) - f(t, y_2)| < L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall t \in I$$

Stabilità nel senso di Liapunov: il problema di Cauchy è stabile nel senso di Liapunov per ogni perturbazione $\big(\delta_0, \delta(t)\big)$ tale che $|\delta_0| < \varepsilon$ e $|\delta(t)| < \varepsilon \; \forall t \in I$, con $\varepsilon > 0$, se esiste un valore $C > 0$ tale per cui:

$$|y(t) - z(t)| < C\varepsilon$$

Stabilità asintotica: il problema di Cauchy è asintoticamente stabile se per $\lim_{t \to \infty} |\delta(t)| = 0$ vale che:

$$\lim_{t \to \infty} |y(t) - z(t)| = 0$$

Definizione zero-stabilità: un metodo numerico per equazioni differenziali ordinarie è zero stabile per $I = (t_0, t_f)$ limitato se:

$$\exists h_0 > 0 \quad \exists C > 0 \quad \exists \varepsilon_0 > 0 : \; \forall h_0 \in (0, h_0) \quad e \quad \forall \varepsilon_0 \in [0, \varepsilon_0] \quad se \; |\delta_n| \leq \varepsilon \quad si\; ha \; |z_n - u_n| \leq C\varepsilon$$

Teorema di equivalenza: un metodo consistente è anche convergente se è zero stabile

Metodo assolutamente stabile: un metodo numerico per equazioni differenziali ordinarie è assolutamente stabile se quando applicato al problema modella si ha che:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Metodo Eulero in avanti (EE)</td>
<td>

Tipo di metodo: esplicito

Ordine di convergenza: 1

Assoluta stabilità: condizionatamente assolutamente stabile

Funzione di stabilità: $R^{EE} = 1 + z$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

```
function [ th, uh ] = ee( f,tf, h,y0 )

th = 0:h:tf;
n = length(th);
uh = zeros(1,n);

for i = 2:n
    uold = uh(i-1);
    uh(i)  = uold+h*f(th(i-1),uold)
end

end
```

</td>
</tr>
<tr>
<td>Metodo di Heun (H)</td>
<td>

Tipo di metodo: esplicito

Ordine di convergenza: 2

Assoluta stabilità: condizionatamente assolutamente stabile

Funzione di stabilità: $R^H = 1 + z + \frac{z^2}{2}$

$$\begin{cases} {u^*}_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Metodi di Runga-Kutta</td>
<td>

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$k_i = f\left(t_n + c_i h, u_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right)$$

</td>
</tr>
</table>

Metodo Eulero indietro (EI)

Tipo di metodo: implicito

Ordine di convergenza: 1

Assoluta stabilità: incondizionatamente assolutamente stabile

Funzione di stabilità: $R^{EI} = \frac{1}{1-z}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

```
function [ th, uh, iter_n] = ei( f,df,tf,h,y0 )

th = [0:h:tf];
n = length(th);
uh = zeros(1,n);
uh(1) = y0;

maxiter = 100;
toll = 1e-12;

for i = 2:n
    uold = uh(i-1);
    t = th(i);
    phi = @(u) uold +h*f(t,u)-u;
    dphi = @(u) h*df(t,u)-1;

    err = 1;
    niter = 0;
    xv = uold;

    while (niter< maxiter && err> toll)
        dfx = dphi(xv);
        if dfx == 0
            error(' Arresto per azzeramento di dfun');
        else
            xn = xv - phi(xv)/dfx;
            err = abs(xn-xv);
            niter = niter+1;
            xv = xn;
        end
    end

    uh(i) = xn;
    iter_n (i) = niter;
end

end
```

Metodo Crank-Nicolson (CN)	Tipo di metodo: implicito Ordine di convergenza: 2 Assoluta stabilità: incondizionatamente assolutamente stabile Funzione di stabilità: $R^{CN} = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$
	$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$
	(see code below)

```
function [t_h,u_h,iter_n]=crank_nicolson(f,df,t_max,y_0,h)

t0 = 0;
t_h = t0:h:t_max;
N   = length(t_h);
u_h = zeros(1,N);
u_h(1) = y_0;

maxiter = 100;
toll = 1e-12;

iter_n=zeros(1,N);

for i = 2:n
    told = t_h(i-1);
    uold = u_h(i-1);
    tnew = t_h(i);
    phi  = @(u) uold +(h/2)*(f(told,uold)+f(tnew, u))- u;
    dphi = @(u) (h/2)*df(tnew, u) - 1;

    err = 1+toll;
    niter = 0;
    xold = uold;

    while (niter< maxiter && err> toll)
        dfx = dphi(xv);
        if dfx == 0
            error(' Arresto per azzeramento di dfun');
        else
            x = xv - phi(xv)/dfx;
            err = abs(x-xold);
            niter = niter+1;
            xold = x;
        end
    end
    u_h(i) = x;
    iter_n(i) = niter;
end
```

Sistemi di EDO del 1° ordine	
ϑ-Metodi	$\begin{cases} \vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + h\left[\vartheta \vec{f}(t_{n+1}, \vec{u}_{n+1}) + (1-\vartheta)\vec{f}(t_n, \vec{u}_n)\right] \\ \vec{u}_0 = \vec{y}_0 \end{cases}$
Posso risolvere i sistemi di equazioni differenziali anche con il metodo di elusero in avanti. La cosa importante è definire prima la funzione y.	
EDO del 2° ordine	
Metodi di leap frog	$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hv_n + \frac{h^2}{2} f(t_n, u_n, v_n) \\ v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n, v_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})] \\ u_0 = y_0 \\ v_0 = w_0 \end{cases}$ v_{n+1} si ottiene con il metodo di Newton. Ricordarsi che un equazione differenziale del secondo ordine è del tipo: $\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = 0$ Per ricavare la funzione $f(t, u, v)$ e la $df(t, u, v)$ da inserire nel codice Matlab per poi poterla risolvere ricordarsi di procedere come segue: $\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = 0$ $x'' + \frac{\beta}{\alpha} x' + \frac{\gamma}{\alpha} x = 0$ $x'' + ax' + bx = 0$ $f(t, u, v) = x'' = -ax' - bx = -av - bu$ $df(t, u, v) = dv = -a$

	<pre>function [th, uh, vh] = lfrog(f,df,tf,u0,v0,h)
	
	th = 0:h:tf;
	n = length (th);
	uh = zeros(1,n);
	vh = zeros(1,n);
	uh(1) = u0;
	vh(1) = v0;
	
	maxiter = 100;
	toll = 1e-12;
	
	for i = 2:n
	    vold = vh(i-1);
	    uold = uh(i-1);
	    told = th(i-1);
	    uh(i) = uold+h*vold+0.5*(h^2)*f(told,uold,vold);</pre>

```
    t = th(i);
    u = uh(i);
    phi = @(v) vold+0.5*h*[f(told, uold, vold)+f(t,u,v)]-v;
    dphi = @(v) 0.5*h*df(t,u,v)-1;

    %devo risolvere vn+1 e calcolare il suo valore, per farlo
    uso newton

    err = 1;
    niter = 0;
    xold = vold;

    while niter<maxiter && err>toll
        dfx = dphi(xold);
        if dfx == 0
            error 'Errore per annullamento della derivata'
        else
            x = xold-phi(xold)/dfx;
            err = abs(x-xold);
            niter = niter+1;
            xold = x;
        end
    end
    vh(i) = x;
end
end
```

Sistemi di EDO del 2° ordine	
Ode45	Usare la funzione di Matlab ode45

Buona posizione dell'equazioni differenziali ordinarie

Enunciato: Se il problema è stabile allora è anche ben posto ovvero la soluzione esiste ed è unica in I.

Dimostrazione (richiesta all'orale): immaginiamo che siano valide le due ipotesi del teorema di esistenza dell'uncità globale ovvero:

1. La funzione f è continua in entrambi gli argomenti
2. La funzione è Lipschitz continua nel secondo argomento $\forall t \in I$ ovvero:

$$\exists L > 0 : \ |f(t, y_1) - f(t, y_2)| < L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall t \in I$$

Scriviamo ora:

$$w(t) = z(t) - y(t)$$

$$\dot{w}(t) = \dot{z}(t) - y(t) = f\big(t, z(t)\big) + \delta(t) - f\big(t, y(t)\big)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dw}{d\tau}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} [f\big(\tau, z(\tau)\big) - f\big(\tau, y(\tau)\big)] d\tau + \int_{t_0}^{t} \delta\tau d\tau$$

$$w(t) - w(t_0) = \int_{t_0}^{t} [f\big(\tau, z(\tau)\big) - f\big(\tau, y(\tau)\big)] d\tau + \int_{t_0}^{t} \delta\tau d\tau$$

$$\boxed{w(t_0) = \delta_0}$$

$$w(t) = w(t_0) + \int_{t_0}^{t} [f\big(\tau, z(\tau)\big) - f\big(\tau, y(\tau)\big)] d\tau + \int_{t_0}^{t} \delta\tau d\tau$$

$$w(t) = \delta_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, z(\tau)) - f(\tau, y(\tau))] d\tau + \int_{t_0}^{t} \delta\tau d\tau$$

$$|w(t)| \leq |\delta_0| + \int_{t_0}^{t} |f(\tau, z(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| d\tau + \int_{t_0}^{t} |\delta\tau| d\tau$$

Per Lipschitz:

$$\int_{t_0}^{t} |f(\tau, z(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| d\tau \leq \int_{t_0}^{t} L|z(\tau) - y(\tau)| d\tau$$

$$|w(t)| \leq |\delta_0| + \int_{t_0}^{t} L|z(\tau) - y(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^{t} |\delta\tau| d\tau$$

$$|\delta_0| < \varepsilon$$

$$\int_{t_0}^{t} |\delta\tau| d\tau < |t - t_0|\varepsilon$$

$$z(\tau) - y(\tau) = w(\tau)$$

$$|w(t)| \leq \varepsilon + \int_{t_0}^{t} L|w(\tau)| d\tau + |t - t_0|\varepsilon$$

$$|w(t)| \leq \int_{t_0}^{t} L|w(\tau)| d\tau + (1 + |t - t_0|)\varepsilon$$

Per il lemma di Grandewell:

$$\int_{t_0}^{t} L|w(\tau)| d\tau \leq e^{\int_{t_0}^{t} L d\tau} = e^{L|t-t_0|}$$

$$|w(t)| \leq (1 + |t - t_0|)\varepsilon e^{L|t-t_0|}$$

Dunque se si ha stabilità la perturbazione è controllata e quindi la soluzione è pressoché esatta.

Risultato di convergenza per il metodo di Eulero in avanti e Stabilità condizionata dei metodi numerici per risolvere EDO

Enunciato: Eulero esplicito converge in modo condizionatamente assolutamente stabile

Dimostrazione:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$$

Applichiamo ora il problema modello tale per cui $\dot{y}(t) = \lambda y$ quindi $f(t_n, u_n) = \lambda u_n$:

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_n$$

$$u_n = (1 + h\lambda)u_{n-1}$$

$$u_{n+1} = (1 + h\lambda)u_n$$

$$u_{n+1} = (1 + h\lambda)u_n = (1 + h\lambda)(1 + h\lambda)u_{n-1}$$

Ripetendo questo procedimento n volte si ottiene:

$$u_n = (1 + h\lambda)^n y_0$$

Affinché dunque si abbia convergenza occorre che $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ e cioè si verifica quando la base dell'esponenziale in modulo è minore 1 ovvero:

$$|1 + h\lambda| < 1$$

$$\begin{cases} 1 + h\lambda > -1 \\ 1 + h\lambda < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + h\lambda > 0 \\ h\lambda < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h < h_{max} = \dfrac{2}{|\lambda|} \\ h < 0 \end{cases}$$

Per ricavare la prima equazione del sistema occorre cambiare i segni e ricordarsi che $\lambda < 0$ per definizione del problema modello dunque i passaggi sarebbero:

$$\begin{cases} 2 + h\lambda > 0 \\ h\lambda < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h\lambda > -2 \\ h\lambda < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -h\lambda < 2 \\ h < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h < \dfrac{2}{|\lambda|} \\ h < 0 \end{cases}$$