CARATTERISTICHE DINAMICHE

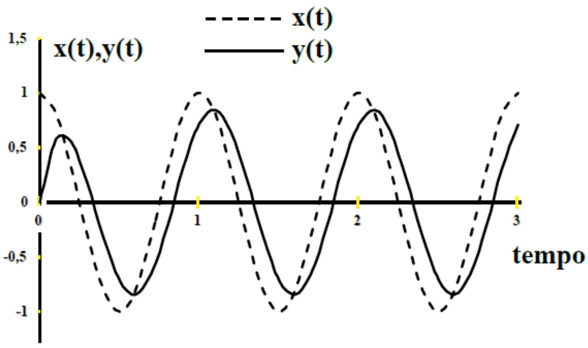
Comportamento ideale

Se si avesse un sistema perfettamente lineare si avrebbe una risposta dinamica ideale; tale risposta esprime la capacità di uno strumento a seguire e misurare una grandezza variabile nel tempo. Il comportamento ideale, dal punto di vista della misura dinamica, è quello descritto da una relazione algebrica fra ingresso e uscita. Una relazione algebrica fra ingresso ed uscita rappresenta il caso in cui l'uscita è legata all'ingresso senza ritardi. Inoltre una relazione algebrica implica che qualunque componente armonica data in ingresso, subirà lo stesso «trattamento» per ottenere l'uscita. Non si avrà quindi una diversa amplificazione di componenti armoniche a frequenze diverse e neppure un diverso ritardo fra una componente e l'altra.

Comportamento reale

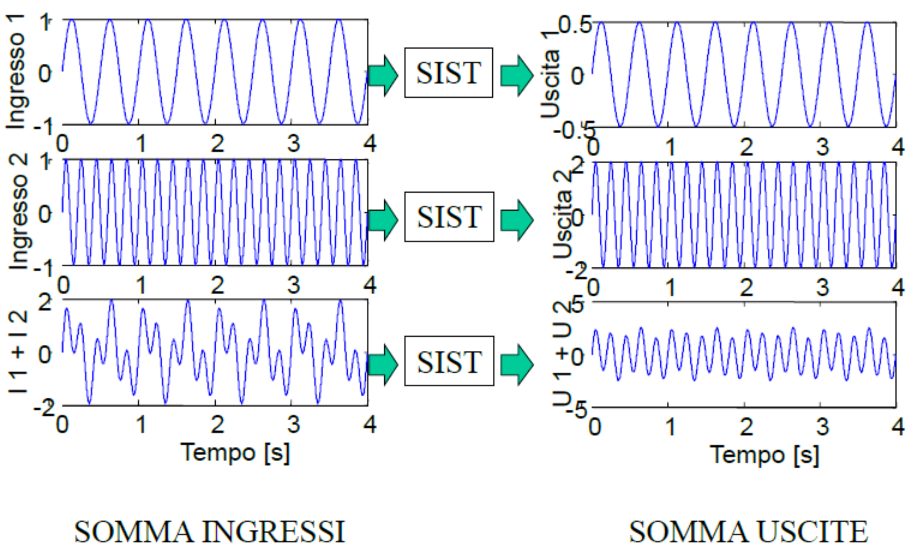
Di fatto però non esiste un sistema ideale; nonostante ciò è possibile considerare dei sistemi reali come tali se i trasduttori misurano sufficientemente bene la grandezza stessa. Se ciò avviene e quindi se il trasduttore riesce da assimilare il comportamento del sistema a quello ideale allora il trasduttore si dice pronto. Un sistema reale, al contrario di quello ideale, genererà un'uscita con un certo ritardo all'applicazione dell'ingresso. Inoltre in generale diverse componenti armoniche avranno differenti valori di amplificazione. Dunque in un sistema lineare si ha una variazione di ampiezza e un ritardo temporale, noto anche come ritardo di fase. Di conseguenza il segnale viene amplificato e traslato sull'asse dei tempi. Dunque dato un ingresso armonico x(t), l'uscita y(t) avrà:

- Un'ampiezza pari a quella dell'ingresso moltiplicata per una costante k
- Un ritardo temporale rispetto all'ingresso



Funzione di trasferimento

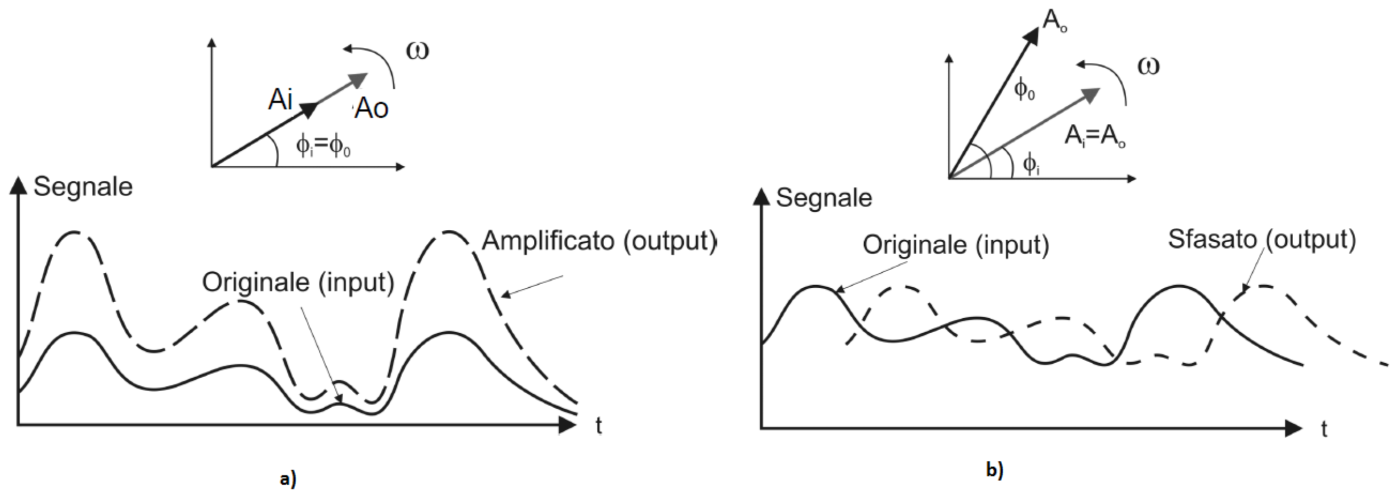
Per comprendere come mai il segnale in uscita viene amplificato e traslato sull'asse dei tempi occorre introdurre la funzione di trasferimento definita come il rapporto tra spettro (trasformata di Fourier) di uscita e lo spettro in ingresso. Questa funzione è definita in funzione della frequenza. Sotto ipotesi che possiamo considerare sempre verificate per le applicazioni di nostro interesse, è possibile pensare che non sia necessario studiare la riposta di un sistema lineare a tutti i possibili segnali variabili nel tempo, ma che sia possibile studiare la riposta a segnali "semplici" e che poi si possa estrapolare da questa riposta quella per segnali più complessi. Questo permette di studiare la risposta dei sistemi lineari in modo molto più semplice. Come già detto, infatti, il segnale in ingresso è composto da tante armoniche e quindi lo si può scomporre in altrettante componenti, in ingresso si può dunque anche fornire singolarmente ogni armonica, ottenendo così un'uscita non sarà una riposta totale ma sarà una componente della risposta totale. Dando in ingresso un'uscita semplice e ottenuta un'uscita semplice si può analizzare la risposta dinamica in modo più semplice, l'uscita semplice avrà la stessa frequenza dell'ingresso semplice. Si può quindi studiare il sistema lineare studiando la risposta dinamica di un segnale semplice e poi sommando tutte queste componenti. Studiare il sistema in questo modo comporta una serie di vantaggi come prevedere la risposta a un ingresso mai studiato.



Per ogni sinusoide che compone il segnale in ingresso la funzione di trasferimento modifica l'ampiezza di un vettore a causa del ritardo, mantenendo però la frequenza costante, cioè la stessa velocità angolare del vettore. Dunque ogni strumento di misura è caratterizzato da una funzione di trasferimento che modifica l'ampiezza e la fase di ognuna delle sinusoidi che compongono il segnale.

Ciò che a noi interessa è la differenza tra due fasi istante per istante analizziamo diversi casi:

a. Segnale semplicemente amplificato = in questo caso i due vettori hanno fase di ingresso uguale a quella in uscita, la stessa velocità angolare ma diverse lunghezza. I due segnali sono allineati, hanno stessa fase ma diversa ampiezza
b. Segnale semplicemente ritardato = in questo caso i due vettori hanno la stessa ampiezza dell'ingresso mentre la fase è diversa perché quella in uscita è in ritardo e infatti il segnale in output è in ritardo rispetto a quello in input



Il ritardo in termine di fase è un ritardo angolare, in termini temporali si calcola come il rapporto tra fase finale meno fase iniziale e 2π tutto per il periodo T:

$$rit = \frac{\phi_o - \phi_i}{2\pi} T$$

La funzione di trasferimento sarà quindi caratterizzata da:

- Fase = che stabilisce per ogni frequenza lo sfasamento temporale introdotto tra il segnale di ingresso e uscita
- Modulo = che stabilisce per ogni frequenza il rapporto tra le ampiezze del segnale di uscita e di ingresso.

Occorre ora comprendere i limiti da imporre al modulo e alla fase affinché la funzione di trasferimento non distorca il segnale. Definiamo prontezza la capacità di misurare un ingresso senza distorcerlo.

Prontezza

Un strumento può essere dichiarato pronto quando è in grado di misurare un segnale dinamico senza distorcerlo cioè senza generare un segnale in uscita diverso da quello in ingresso. Per avere questa prontezza occorrono dei vincoli sia sul modulo che sulla fase:

- Modulo = l'amplificazione deve essere uguale per tutte le frequenze
- Fase = l'ideale sarebbe un ritardo temporale nullo ma ciò è irrealizzabile e quindi occorre avere o ritardo temporale trascurabile o costante per tutte le componenti

Nell'ottica di studiare le prestazioni di uno strumento, queste modifiche sulle diverse armoniche (sinusoidi) che formano il segnale di ingresso, devono essere tali per cui il segnale in uscita, ottenuto come somma delle risposte ai singoli segnali semplici in ingresso, abbia "lo stesso aspetto" di quello ricevuto in ingresso, il che significa lo stesso segnale, al più moltiplicato per una costante e traslato nel tempo.

Lo strumento effettua correttamente queste operazioni solo in una banda compresa tra due frequenzef_{min} e f_{max}, in questa banda lo strumento è pronto. Tale banda prende il nome di banda passante dello strumento di misura e viene definita come il campo di frequenza f_1 e f_2 entro cui il segnale non risulta distorto. In questa banda:

- il modulo della risposta in frequenza si mantiene costante entro una specificata tolleranza
- la fase risulta essere nulla entro questa stesa specifica tolleranza.

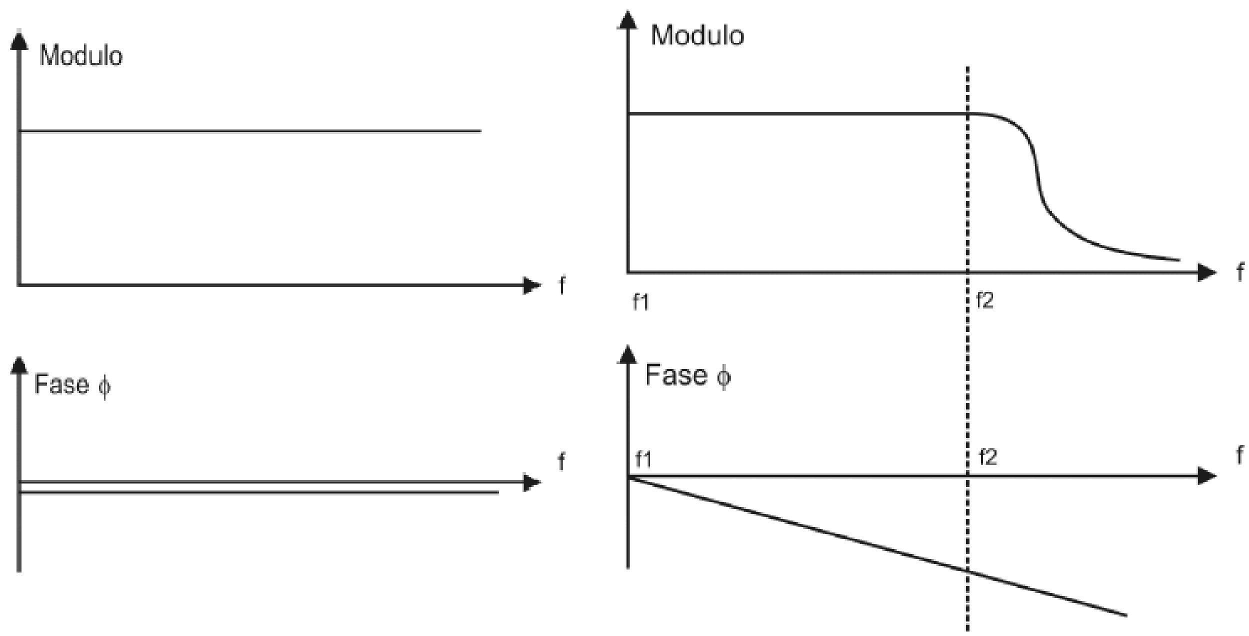
Questo caso è una situazione ideale ed è rappresentato nel grafico sottostante. La banda di interesse del fenomeno oggetto della misura deve essere interamente contenuta nella banda passante dello strumento quindi:

$$f_1 \leq f_{min} \leq f_{max} \leq f_2$$

Nel caso reale la condizione non è così limitante infatti un segnale non viene distorto quando tutte le armoniche in esso presenti vengono moltiplicate per un fattore costante e lo sfasamento delle armoniche in uscita, rispetto a quelle del segnale in ingresso, è pari a:

- 0° nessun ritardo fra ingresso e uscita
- 180° uscita con segno cambiato rispetto all'ingresso
- Proporzionale all'ordine dell'armonica tutte le armoniche dell'uscita hanno pari ritardo temporale rispetto all'ingresso

Dunque nel caso reale è sufficiente quest'ultima ipotesi e cioè che la fase sia proporzionale all'ordine dell'armonica, cioè alla frequenza.



Caso ideale Caso reale

Si dimostra che lo sfasamento proporzionale all'ordine dell'armonica equivale ad un ritardo costante nel tempo:

$$\varphi_1 = \phi_o - \phi_i$$

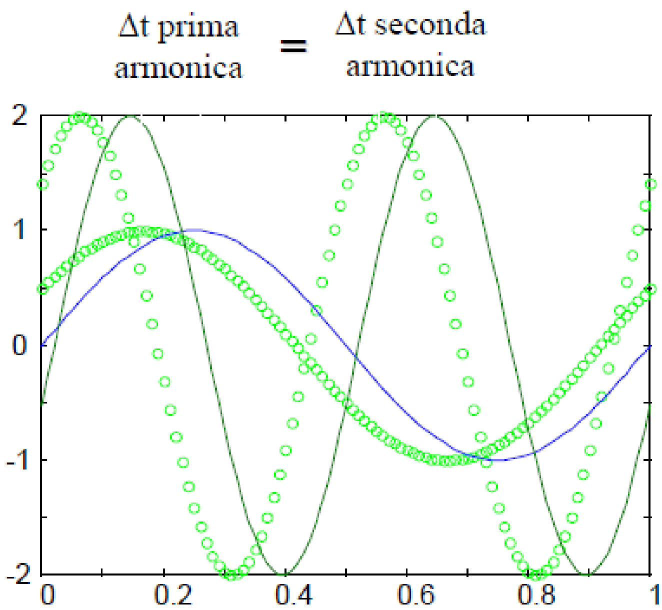
$$\varphi_n = n\varphi_1$$

$$\frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{t_1}{T}$$

$$\frac{\varphi_n}{2\pi} = \frac{t_1}{\frac{T}{n}}$$

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{t_n}{\varphi_n}$$

In definitiva lo sfasamento proporzionale all'ordine dell'armonica significa traslare l'asse dei tempi di t_1 secondi. Questo non genera distorsione del segnale ma solo un suo ritardo. Queste considerazioni devono applicarsi a tutte le sinusoidi nelle quali si deve pensare scomposto il segnale di partenza: la valutazione della prontezza dipende infatti sia dalle frequenze del segnale di ingresso sia dalle prestazioni dello strumento. Per fortuna in campo ingegneristico non è richiesta una riproduzione perfetta del segnale di partenza ma si possono accettare delle tolleranze, entro limiti dati. È quindi necessario che lo strumento si mostri pronto per le armoniche di interesse. In genere queste armoniche sono limitate in una banda in frequenza definita.



Studio del comportamento dinamico

Per studiare il comportamento dinamico di sistemi è possibile usare due diversi approcci:

1. Analitico = si studia analiticamente la risposta del sistema, andando a scrivere le equazioni dinamiche del sistema stesso. In questo primo caso è nota l'equazione dello strumento
2. Sperimentale = si effettuano delle prove in cui si osserva sperimentalmente la risposta dinamica del sistema. In questo secondo caso non è nota l'equazione dello strumento o è troppo complessa

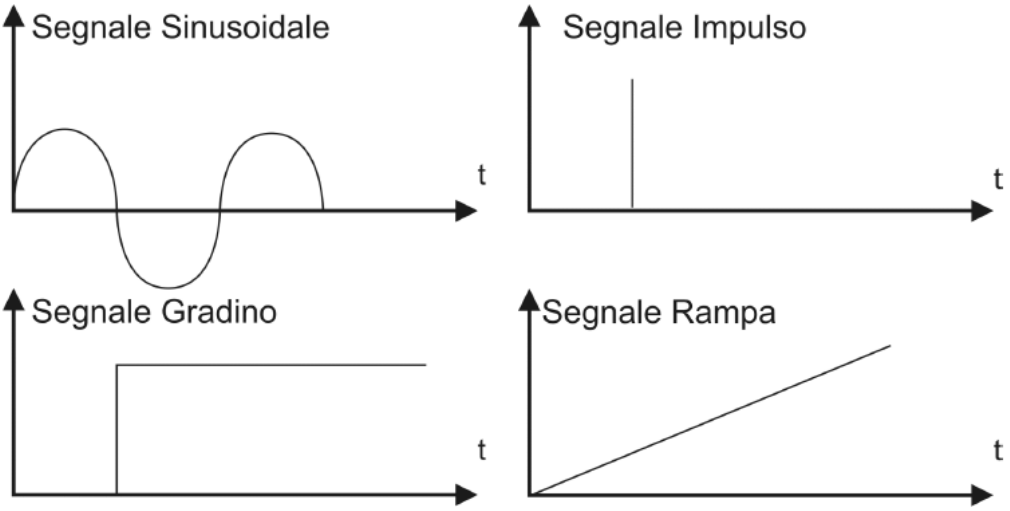
I due approcci sono fra loro complementari ed è opportuno usare entrambi: l'approccio analitico permette di comprendere il comportamento atteso dello strumento e di capire quali parametri sono più significativi per la sua risposta dinamica, l'approccio sperimentale invece permette di verificare quanto previsto in modo analitico e di stimare i valori da assegnare ai parametri del modello analitico.

Come già detto, nello studio della dinamica dei sistemi lineari è molto utile scomporre il segnale in ingresso in somma di segnali armoniche (con la trasformata di Fourier), la scomposizione del segnale in sinusoidi ben si presta a rappresentare segnali periodici, analizzare la risposta a ciascun ingresso armonico, e poi sommare le risposte ai segnali armonici semplici, per ottenere la risposta del sistema all'ingresso complessivo. É possibile effettuare la sovrapposizione degli effetti nei sistemi lineari e quindi nei sistemi lineari, nota la riposta a ciascuna componente armonica, la risposta a somma di armoniche è la somma delle risposte alle singole componenti.

Un altro metodo per studiare i sistemi è studiare la riposta ad ingressi semplici. Ad esempio la somma di impulsi è tendenzialmente più adatta per la rappresentazione di transitori. I segnali più comuni sono:

a. Segnale sinusoidale

b. Segnale impulso
c. Segnale gradino
d. Segnale rampa



Metodo analitico

Un sistema lineare può in generale essere studiato analizzando il legame ingresso-uscita attraverso una equazione differenziale del tipo:

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_o = b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i$$

che coinvolge in generale:

- le derivate dell'ingresso q_i rispetto al tempo dall'ordine zero (non derivato) fino al generico ordine m (derivata m-esima dell'ingresso rispetto al tempo);
- le derivate dell'uscita q_0 rispetto al tempo dall'ordine zero (non derivato) fino al generico ordine n (derivata n-esima dell'uscita rispetto al tempo).

Per semplicità indicheremo le derivate con la lettera D:

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$a_n D^n q_o + a_{n-1} D^{n-1} q_o + \cdots + a_1 D q_o + a_0 q_o = b_m D^m q_i + b_{m-1} D^{m-1} q_i + \cdots + b_1 D q_i + b_0 q_i$$

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0) q_o = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \cdots + b_1 D + b_0) q_i$$

In realtà la quantità di queste derivate è notevolmente ridotta perché molte di esse si semplificano. La soluzione di questa equazione è stata studiata in modo sistematico con diversi metodi come ad esempio la trasformata di Laplace. La soluzione sarà dunque data dalla somma tra l'integrale generale (risposta libera quando $q_i = 0$) e quello particolare (risposta forzata quando $q_i \neq 0$). La funzione di trasferimento che lega l'ingresso all'uscita è la seguente:

$$TF = \frac{q_o}{q_i}(D) = \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \cdots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0}$$

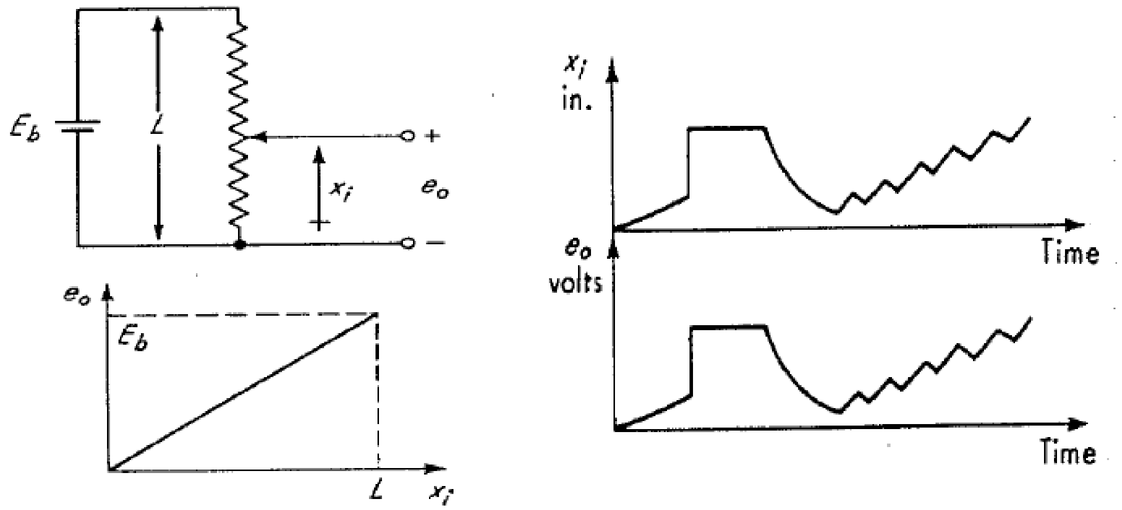
Strumento di ordine 0

Lo strumento di ordine zero è lo strumento ideale: ovvero uno strumento che genera in uscita un segnale legato all'ingresso con una legge algebrica che non presenta alcuna derivata dell'ingresso e dell'uscita. Questo aspetto porta ad avere un legame tra ingresso ed uscita che non ha sfasamenti nel tempo. Sono sistemi descritti da un'equazione del tipo:

$$a_0 q_0 = b_0 q_i$$

$$q_0 = \frac{b_0}{a_0} q_i = k q_i$$

Esempio: il potenziometro è idealmente uno strumento di ordine 0. Infatti che ci fosse una resistenza pura sarebbe realmente uno strumento di ordine zero, ma, non appena, il cursore si muove un po' più in fretta si presentano effetti capacitivi e induttivi che provocano degli errori. Inoltre il cursore avrà sempre una massa, dunque un'inerzia, che impedisce l'impiego di un modello di strumento di ordine 0. Tutte le volte infatti che ci sono inerzie questo modello viene messo in crisi ed occorre introdurre il modello di strumento di primo ordine



Strumento del primo ordine

In questo modello la derivata del primo ordine dell'uscita ha un coefficiente diverso da 0. Tutte le altre derivate dell'uscita e tutte le derivate dell'ingresso avranno invece coefficiente nullo. Sono dunque sistemi descritti da un'equazione del tipo:

$$q_0 + \tau \frac{dq_0}{dt} = k q_i$$

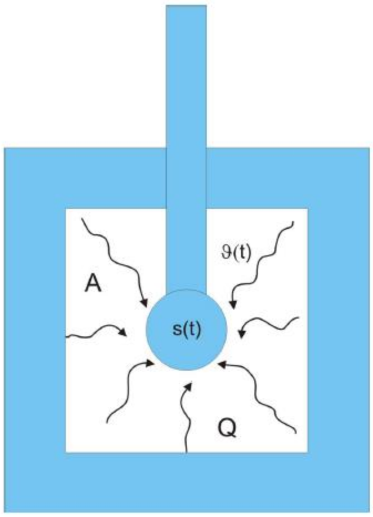
$$(\tau D + 1) q_0 = k q_i$$

La funzione di trasferimento è dunque:

$$\frac{q_0}{q_i} = \frac{k}{\tau D + 1}$$

In questo caso il sistema è dunque definito da due parametri: τ, costante di tempo che descrivere le caratteristiche dinamiche del sistema del primo ordine, e k, sensibilità statica che rappresenta invece il rapporto uscita/ingresso in condizioni di regime. Il problema della determinazione del comportamento dello strumento si riduce ad una identificazione dei parametri. Il modello di strumento di primo ordine ben rappresenta molti strumenti in cui il principio di misura è legato al trasferimento di calore.
Esempio: il termometro a liquido è un esempio di strumento di primo ordine. Tale termometro a dilatazione è caratterizzato da una certa temperatura $s(t)$ ed è immerso in un liquido ad una temperatura $\vartheta(t)$. Si indica con A la superficie di scambio del calore tra liquido e termometro. Se il fluido è più caldo della sonda il termometro si scalda fino a risultare in equilibrio. Trascurando le variazioni di energia cinetica della massa di liquido in moto nel capillare, le

variazioni di energia potenziale, gli effetti della capillarità e della viscosità, definiamo Q la quantità di calore scambiato tra liquido e fluido. La quantità elementare di calore scambiato tra i due corpi sarà quindi uguale a:



$$dQ = kA(\vartheta - s)dt$$

L'equazione è scritta in forma differenziale e non in forma finita perché lo scambio termico è proporzionale al salto di temperatura inoltre la quantità infinitesima di calore in un certo istante temporale dipenda dalla variazione infinitesima della temperatura e in istanti successivi la variazione di temperatura cambia. Ricordando che il calore entrate nel termometro ne innalza la temperatura secondo la legge:

$$dQ = mcds$$

dove mè la massa del liquido nel termometro, c è il calore specifico. Combinando le due leggi si ottiene:

$$kA(\vartheta - s)dt = mcds$$

$$\vartheta = \frac{ds}{dt}\frac{mc}{kA} + s$$

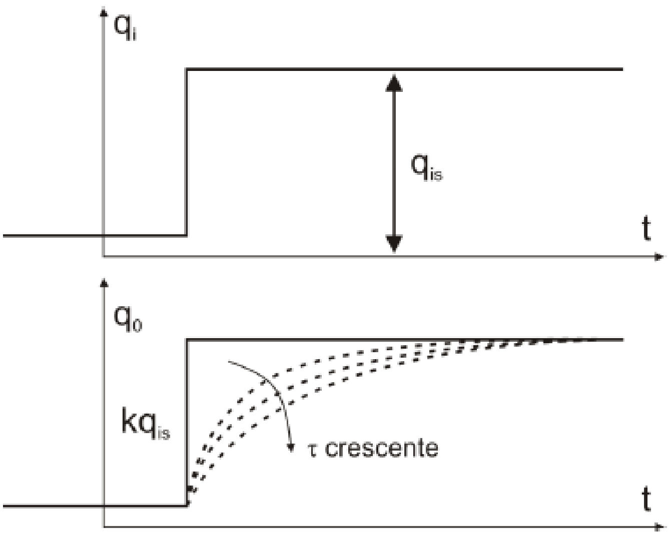
È ora evidente l'equazione dello strumento di primo ordine se si mette impone che:

$$s = q_0$$

$$\vartheta = q_i$$

$$\tau = \frac{mc}{kA}$$

Strumento del primo ordine: risposta al gradino (analisi nel tempo)



Studiando ora la risposta del trasduttore ad un ingresso a gradino nel dominio del tempo si vede che, al crescere di della costante di tempo τ la risposta al gradino è più "lenta", cioè l'uscita del sistema impiega più tempo ad approssimarsi al valore asintotico dell'uscita. Si intuisce dunque che il parametro fondamentale degli strumenti del primo ordine è proprio τ. Nel diagramma In non si hanno funzioni di trasferimento, bensì dei diagrammi dell'andamento di ingresso e uscita del sistema, nel dominio del tempo. In questo tipo di ingresso si ha che:

- le condizioni inziali sono $q_0 = 0$ per $t = 0^+$
- L'integrale generale è: $q_{og} = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$
- All'inizio di ha che: $q_0 = q_i = 0$
- All'istante iniziale $t = 0$ q_i cresce istantaneamente di una quantità q_{is}
- L'integrale particolare è: $q_{op} = kq_{is}$

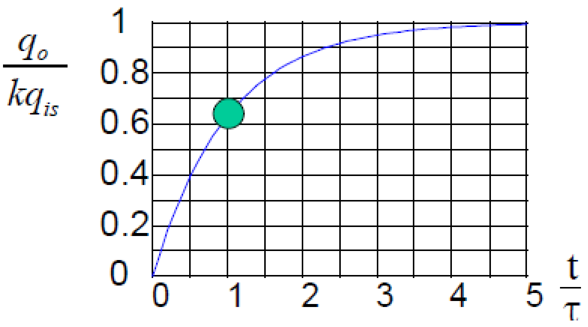
Applicando tutte queste condizioni si trova che la risposta al gradino di un sistema di primo ordine è:

$$q_0 = kq_{is}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

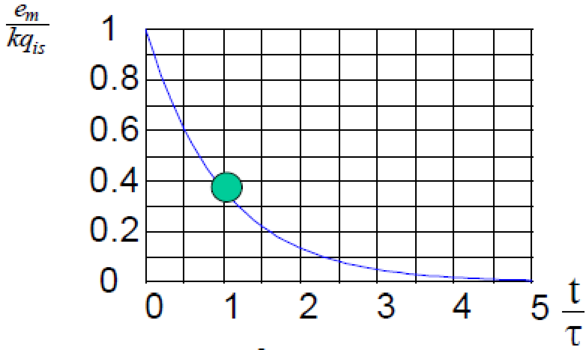
Questa equazione racchiude anche il motivo tale per cui l'uscita del sistema impiega più tempo ad approssimarsi al valore asintotico dell'uscita: questo effetto dipende dalla sensibilità statica e dalla costante di tempo. Molto spesso conviene adimensionalizzate la risposta al gradino ottenendo così una forma generale che vale per qualsiasi terna di valori k, q_{is}e τ:

$$\frac{q_0}{kq_{is}} = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Effettuando questa divisione si adimensionalizza l'asse verticale del grafico del modulo della funzione di trasferimento, per adimensionalizzare l'asse orizzontare si divide il tempo per la costante di tempo ottenendo dunque $\frac{t}{\tau}$. Per il grafico della fase si pone sull'asse verticale il rapporto tra lo scostamento tra input e output e_m e kq_{is}.

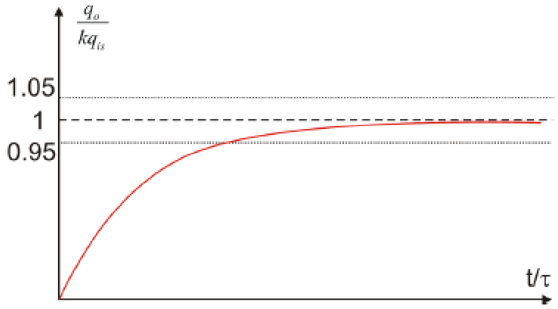


modulo



fase

Dal momento in cui la risposta è asintotica si definisce una fascia di tolleranza al di sotto del quale si può assumere che il gradino sia raggiunto. Il tempo di risposta è allora quello oltre il quale il valore della grandezza e misura restituita dallo strumento differiscono a meno di un errore prefissato. Uno strumento pronto ha τ basso.



Strumento del primo ordine: risposta a un'armonica (analisi in frequenza)
Abbiamo dunque appena visto la risposta dei sistemi del primo ordine all'ingresso a gradino, quindi nel dominio del tempo. Analizziamo invece ora la risposta dei sistemi del primo ordine, lavorando nel dominio delle frequenze: In questo caso ci interessiamo quindi della funzione di trasferimento. Lavorando nel dominio delle frequenze, si studia la risposta del sistema lineare a un ingresso semplice armonico. Studiamo la risposta di una armonica alla volta e poi studieremo la risposta complessiva con la sovrapposizione degli effetti.
Se q_i è un'armonica, allora l'operazione di derivazione consiste nel moltiplicare per $j\omega$. Dunque a regime e con q_i armonica si avrà:

$$\frac{q_0}{q_i}(j\omega) = \frac{k}{j\omega\tau + 1} = \frac{k}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \angle \arctan\left(-\omega\tau\right)$$

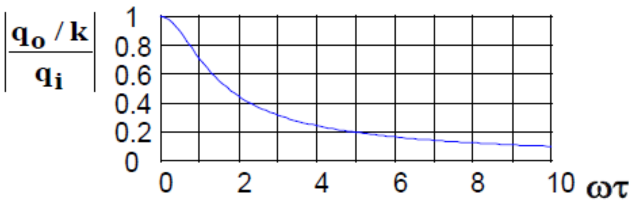
Il modulo della funzione di trasferimento sarà dunque:

$$\left|\frac{q_0}{q_i}(j\omega)\right| = \frac{k}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}$$

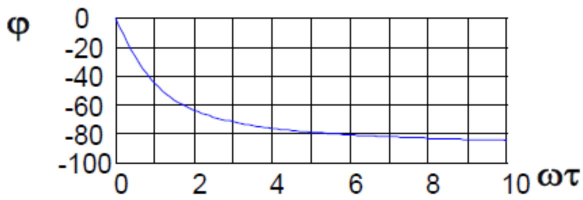
Mentre la fase della funzione di trasferimento sarà:

$$\varphi = \angle\frac{q_0}{q_i}(j\omega) = \arctan\left(-\omega\tau\right)$$

Anche in questo caso è possibile la scrittura in forma adimensionalizzata della risposta in frequenza di uno strumento del primo ordine; proprio per questo scopo si moltiplica τ per ω sull'asse orizzontale. Anche in questo caso inoltre gli assi sono resi adimensionali in modo che la stessa curva sia valida per tutti gli strumenti del primo ordine.



modulo



fase

Quando ω per τ è molto basso e quindi si ha un sistema del primo ordine molto lento nel tempo, il modulo è circa unitario e quindi l'uscita del sistema ha approssimativamente la stessa ampiezza dell'ingresso. La riposta in frequenza di un generico strumento del primo ordine tende mantenere le più basse frequenze ed eliminare quelle alte, per questo motivo un sistema del primo ordine si comporta come un filtro passa basso.

Determinazione parametro τ

Ritornando ai sistemi del primo ordine. Un metodo semplice ma efficace di stimare τ è quello di dare in ingresso al sistema un segnale a gradino e misurarne l'uscita. Come sappiamo dallo studio dei sistemi del primo ordine, la risposta del sistema del primo ordine al gradino ha una equazione nota:

$$q_0 = kq_{is}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Sostituendo $t = \tau$, si trova che, dopo un tempo pari alla costante di tempo, il sistema ha compiuto una certa percentuale, il63,2% circa, del gradino applicato. Andando quindi a cercare quanto tempo impiega il sistema a compiere questa percentuale del gradino, si ricava la costante di tempo τ.
La risposta del sistema del primo ordine al gradino ha una forma esponenziale. Se riscrivo l'equazione di risposta al gradino, posso scrivere la prima equazione in alto al lucido.
A tale equazione posso applicare il logaritmo, come scritto nella slide, e ottenere la funzione Z. La funzione Z mi aspetto che sia un segmento di retta, dopo l'applicazione del logaritmo. Avendo noto l'ingresso (qi) e avendo misurato l'uscita (qo), posso calcolare i valori della funzione Z a partire dai miei dati sperimentali. Tali dati si allineeranno in teoria perfettamente lungo una retta. A causa di incertezze e rumore, non saranno perfettamente allineati, tuttavia avrò un andamento sostanzialmente lineare.
Come si vede dal lucido, il coefficiente angolare di tale retta è il reciproco della costante di tempo tau (a meno del segno). Da queste considerazioni capisco che posso stimare tau in questo modo (vedi prox slide).

Diapositiva fino a 83

Strumento del secondo ordine: risposta libera (analisi nel tempo)

Moltissimi sistemi reali si comportano come sistemi del secondo ordine: in campo meccanico infatti la grande maggioranza dei sistemi lineari sono rappresentabili come sistemi del secondo ordine. Sono dunque sistemi descritti da un'equazione del tipo:

$$a_2 \frac{d^2 q_0}{dt^2} + a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i$$

I sistemi del secondo orine sono descritti da 3 parametri; questi possono essere ad esempio:

$$\frac{a_2}{b_0} \quad \frac{a_1}{b_0} \quad \frac{a_0}{b_0}$$

Molto spesso vengono però espressi come:

- Sensibilità statica $\qquad k = \frac{b_0}{a_0}$
- Pulsazione propria $\qquad \omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$
- Smorzamento adimensionale $\qquad h = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$

Dalla pulsazione propria è possibile ricavare la frequenza propria che è pari a:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

L'equazione generale sopra scritta può essere riscritta come:

$$q_0\left(\frac{a_2}{a_0}D^2 + \frac{a_1}{a_0}D + \frac{a_0}{a_0}\right) = \frac{b_0}{a_0}q_i$$

$$q_0\left(\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2hD}{\omega_n} + 1\right) = kq_i$$

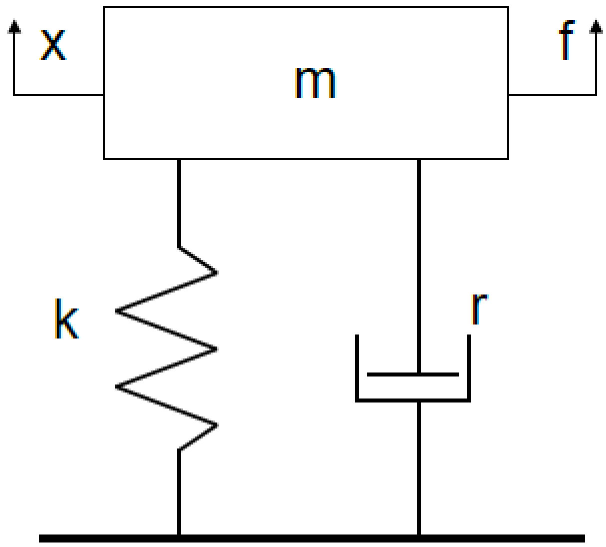
<u>Esempio:</u> Il più semplice sistema del secondo ordine è quello rappresentato da una massa, sospesa su una molla e su uno smorzatore. Studiando questo sistema nel dominio delle frequenze, l'analisi matematica ci permette di stabilire che la soluzione sarà una funzione soluzione del tipo: $X_0 e^{j\omega t}$ le cui derivate sono facilmente calcolabili:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f$$

$$x = X_0 e^{j\omega t}$$

$$\dot{x} = j\omega X_0 e^{j\omega t} = j\omega x$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 X_0 e^{j\omega t} = -\omega^2 x$$



Sostituendo x, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ nell'equazione di equilibrio dinamico si ottiene una formulazione utile per i successivi passaggi:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f$$

$$m(-\omega^2 x) + rj\omega x + kx = f$$

$$x(-\omega^2 m + rj\omega + k) = f$$

$$\frac{x}{f} = \frac{1}{-\omega^2 m + rj\omega + k}$$

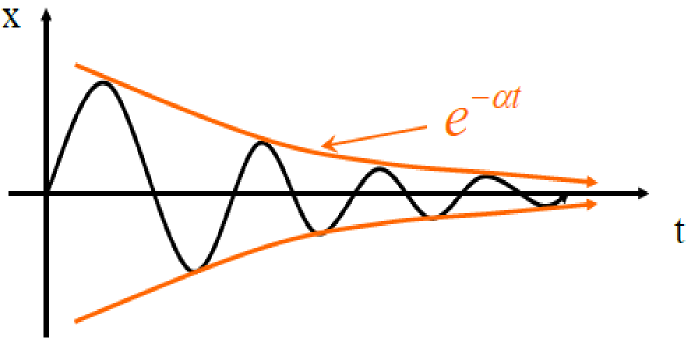
Se sottoposto a ingresso impulsivo il sistema risponde con un moto oscillante di pulsazione propria pari a:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La risposta libera all'impulso sarà quindi:

$$x = X_0 \cos(\omega t)\, e^{-\alpha t}$$

La risposta libera all'impulso del secondo ordine ha come inviluppo una funzione esponenziale, nel grafico è in arancione. Lo smorzamento può essere espresso in diverse forme:



$$h = \frac{r}{2m\omega_0}$$

$$\alpha = \omega_0 h = \frac{r}{2m}$$

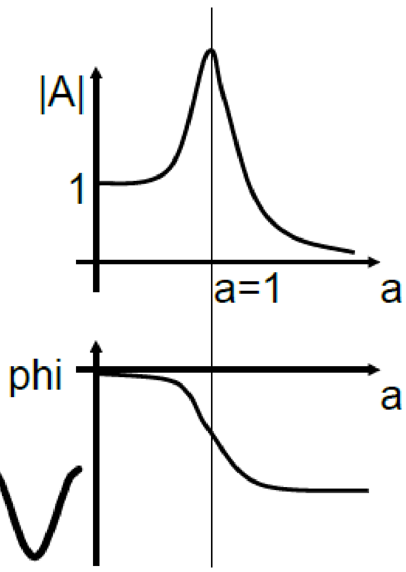
Ricordiamo che h è lo smorzamnto adimensioanle mentre r è quello dimensionale.

Strumento del secondo ordine: risposta in frequenza

Anche in questo caso è possibile adimensionalizzare l'asse delle frequenze, esprimendo la variabile indipendente ω, la pulsazione, per la pulsazione propria. La pulsazione propria è quella a cui oscilla il sistema in moto libero. Dunque definendo:

$$a = \frac{\omega}{\omega_0}$$

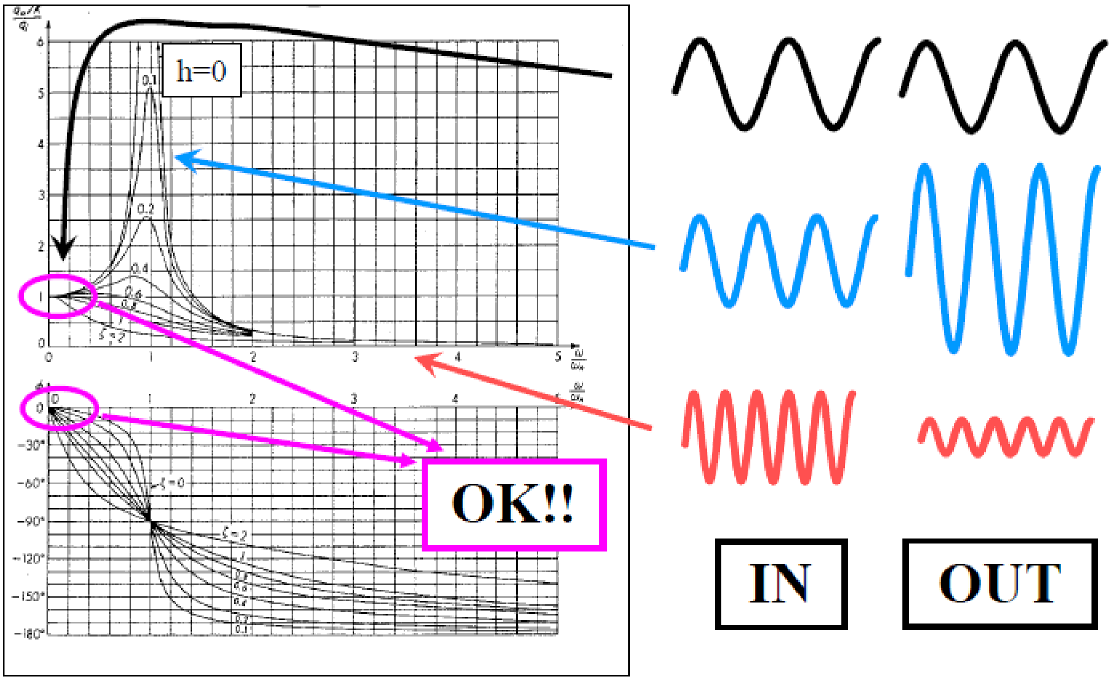
È possibile scrivere la funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine come:



$$A(a) = 1/\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ah)^2}$$

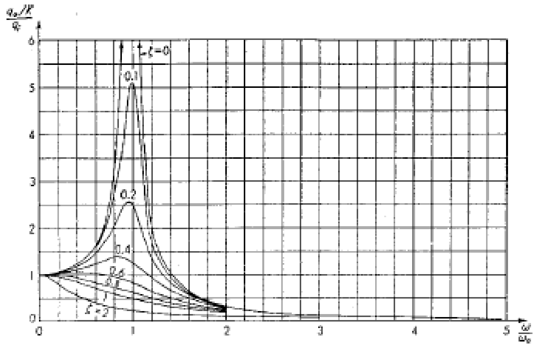
$$tg\varphi = -\frac{2ah}{1-a^2}$$

Il modulo della funzione di trasferimento tiene conto dei diversi livelli di amplificazione che il sistema genera per le diverse componenti armoniche. La fase

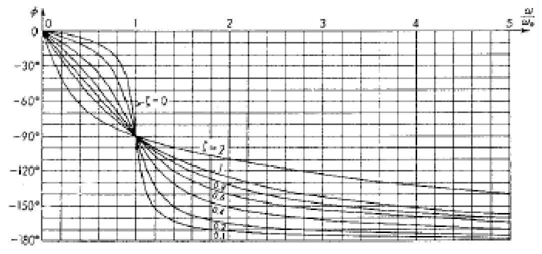


della funzione di trasferimento tiene conto del ritardo di fase che si ha fra uscita ed ingresso a ciascuna frequenza.

Ricordiamo che lo strumento è pronto, ossia non distorce il segnale in ingresso q_i, se il modulo della funzione di trasferimento è costante per tutte le armoniche e se la fase è 0°, 180° o proporzionale all'ordine dell'armonica. Questo accade per valore di $\omega \ll \omega_0$. Ovviamente, se ω_0 cresce, lo strumento sarà pronto per ω maggiori. Per misurare alte frequenze in q_i, occorrono strumenti con alte ω_0. Solitamente privilegiare le caratteristiche dinamiche deprime la sensibilità e viceversa.
È possibile sfruttare h per allargare la zona in cui lo strumento è pronto. Se $h \approx 0{,}7$ la curva del modulo della funzione di trasferimento parte con tangente orizzontale e si mantiene circa costate fino in prossimità della zona di risonanza. La fase è proporzionale all'ordine dell'armonica.



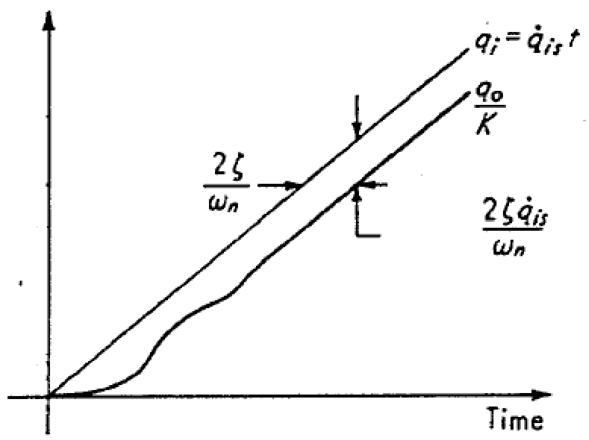
modulo



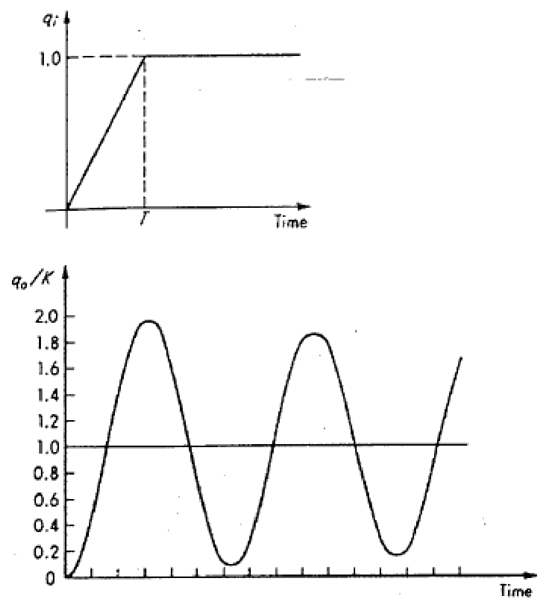
fase

Strumento del secondo ordine: risposta alla rampa

Un altro ingresso che viene a volta utilizzato è la rampa cioè un segnale linearmente crescente. La risposta alla rampa ha un po' di oscillazioni e a regime è parallela alla rampa ma con un ritardo. L'altro ingresso possibile di questa tipologia è la rampa fino ad un regime. In questo caso si analizza la riposta a questo segnale perché è il più vicino al gradino reale. Infatti strumenti con alta ω_n e basso h sembrerebbero rispondere molto male al gradino ideale, mentre invece hanno un ottimo comportamento.



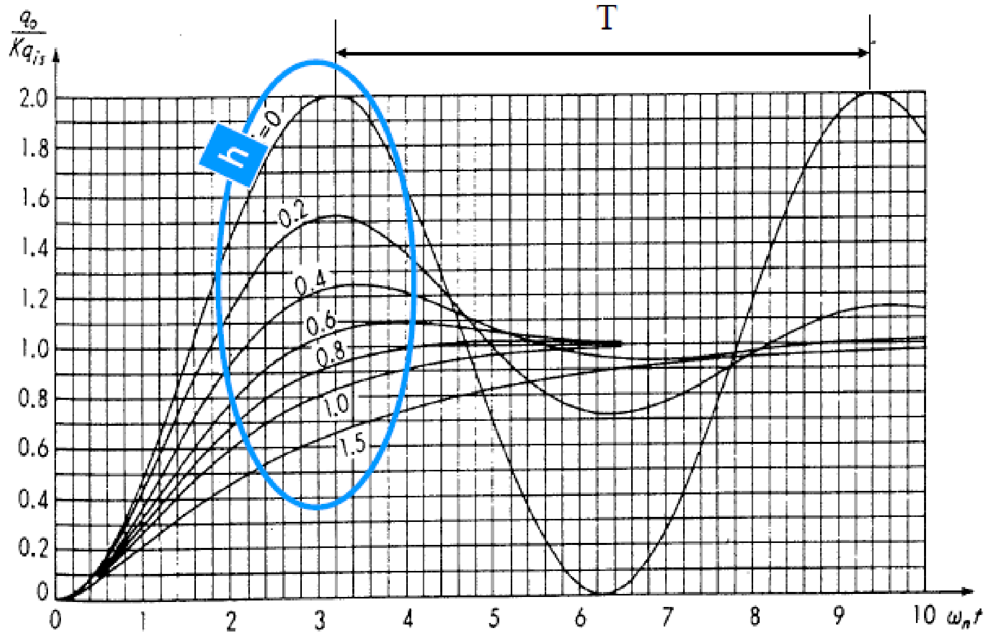
rampa



rampa fino ad un regime

Strumento del secondo ordine: risposta al gradino

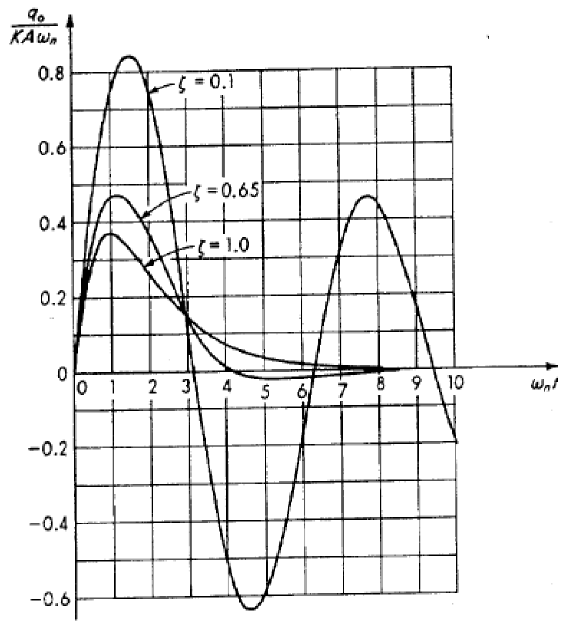
L'analisi di questa equazione è rappresentabile dal grafico sotto riportato. Al variare dello smorzamento si avrà una risposta differente. Se lo smorzamento è nullo in ingresso si ha un gradino e in uscita si ha un segnale armonico che non si smorza mai. Se h è maggiore di 0 bastano pochi cicli per arrivare un'ampiezza di oscillazione praticamente nulla. Se lo smorzamento non è troppo elevato è possibile stimare la frequenza di risonanza, inoltre vedendo quando rapidamente l'oscillazione tende a smorzarsi è possibile comprendere lo smorzamento modale.



Sottolineiamo che la pulsazione propria del sistema è quella alla quale naturalmente oscilla il sistema, una volta perturbato e lasciato proseguire in moto libero, senza alcun'altra perturbazione esterna. Interpretazioni più interessanti vengono da valutazioni nel dominio delle frequenze.

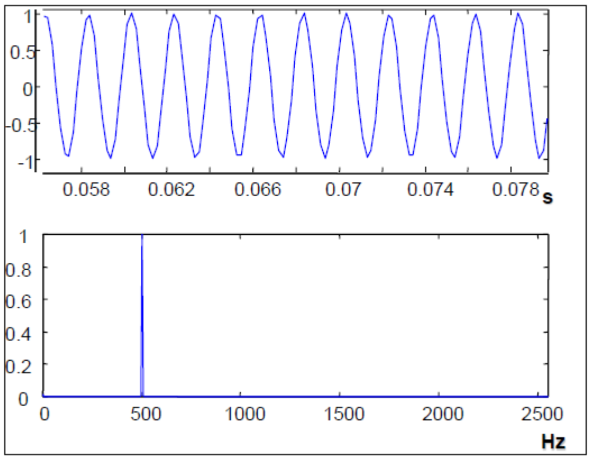
Strumento del secondo ordine: risposta all'impulso

Nell'impulso l'uscita si stabilizzerà di nuovo sullo zero. Anche questa risposta dipende dallo smorzamento. Se è basso si possono avere numerosi cicli.

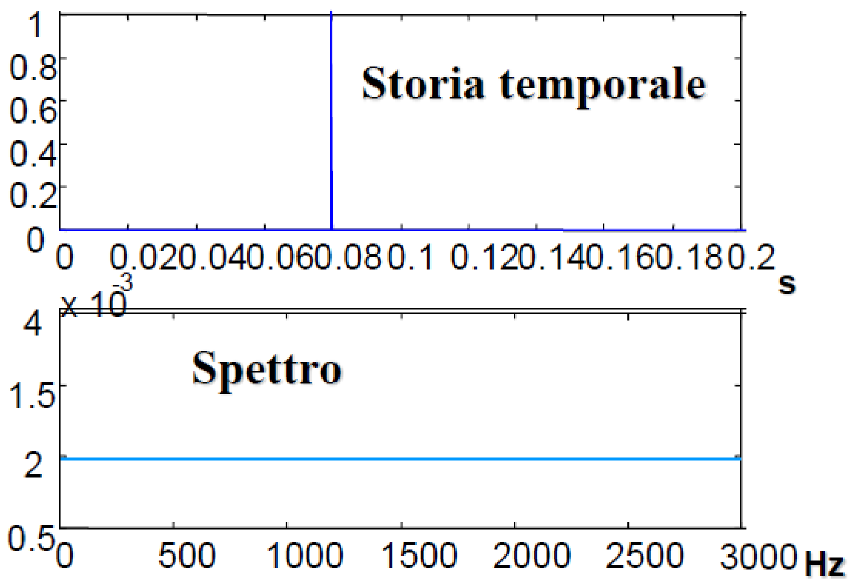


Determinazione sperimentale della prontezza

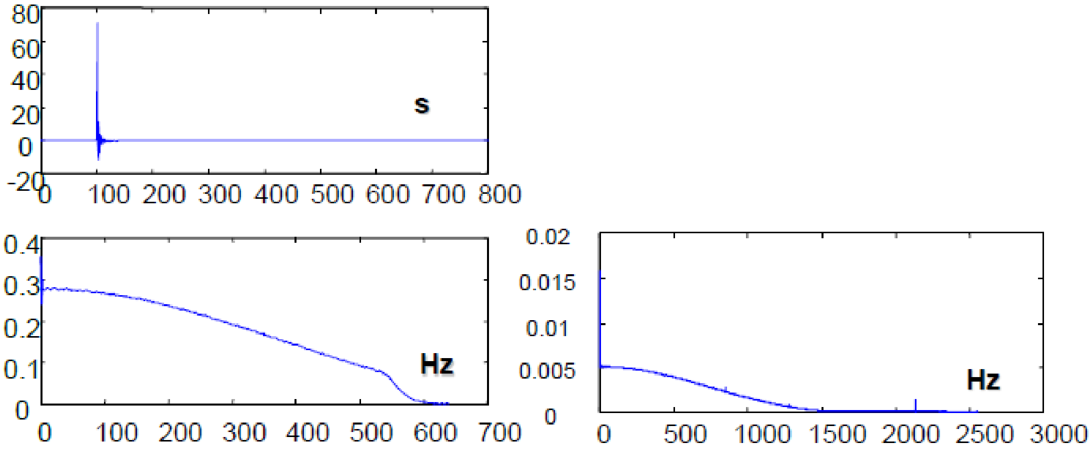
Si parla di taratura dinamica di un sistema quando si studia la risposta dinamica di un trasduttore. Si hanno degli ingressi che possono essere quelli fino ad ora citati quali l'impulso, la rampa, la sinusoide e il gradino. La scelta del tipo di segnale da impiegare è dettata per lo più dalla comodità e dalla semplicità operativa: talvolta si è impossibilitati a fornire certi segnali semplici perché potrebbero danneggiare lo strumento. Va inoltre ricordato che per certi segnali, in particolare l'impulso rampa e gradino, la situazione reale è sempre diversa da quella ideale: sarebbe infatti richiesta energia infinita per poter fornire un impulso, una rampa o un gradino ideale. Esaminiamo ora le risposte in funzione dei diversi ingressi:



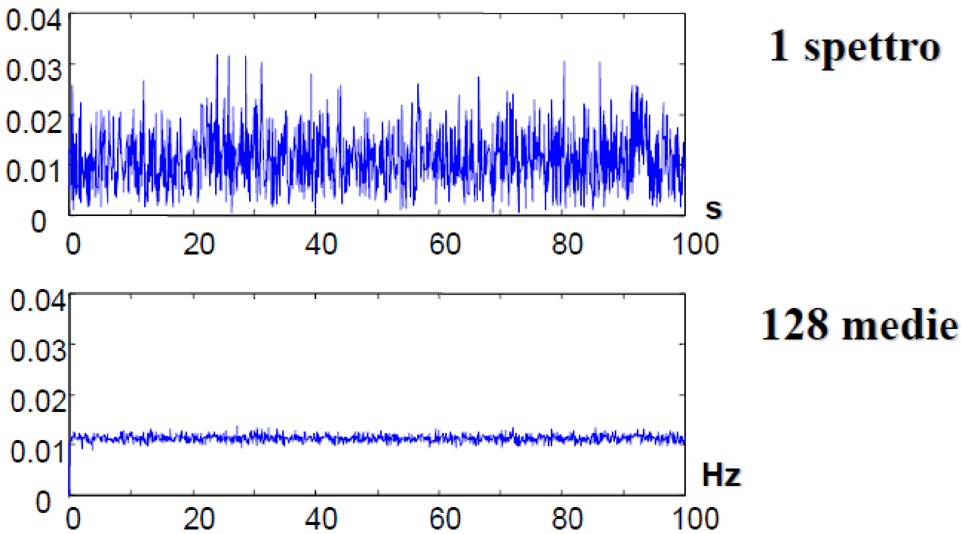
- Sinusoide = vengono effettuate diverse prove, ciascuna con una diversa frequenza della sinusoide in ingresso e per ciascuna di queste si stimano il modulo e la fase della funzione di trasferimento. Valutare la risposta in frequenza significa dunque in questo caso fornire un ingresso sinusoidale di ampiezza nota e frequenza variabile pure nota e costruire per punti la funzione di trasferimento armonica.
- Impulso ideale = l'energia viene ripartita in uguale maniera su tutte le frequenze. Ovviamente l'energia distribuita su ciascuna frequenza è minore rispetto al caso della sinusoide. È una prova molto rapida. Si genera una quantità di energia trasferita al sistema molto limitata, prova che va bene se il sistema non è massivo. L'impulso ideale ha un grosso pregio poiché consente di valutare molto rapidamente la risposta in frequenza consentendo in breve tempo di sondare il comportamento dello strumento in un ampio campo di frequenze. Teoricamente poi, siccome l'energia ingresso è equamente ripartita su tutte le frequenze, sarebbe in teoria possibile valutare la prontezza dello strumento semplicemente guardando la riposta, senza la necessitò di valutare la funzione di trasferimento. Affinché la prova abbia un senso è necessario mediare più risposte all'impulso, ino modo da mantenere la parte deterministica di segnale abbattendo il rumore aleatorio. Un limite all'impego dell'impulso è la bassa energia fornita in corrispondenza di ciascuna frequenza.



- Impulso reale



- Rumore bianco = l'impulso ideale tuttavia non è il solo tipo di segnale a presentare uno spettro con ampiezza costante al variare della frequenza; un altro segnale con questo spettro è il rumore bianco ossia un segnale costituito da una sequenza di numeri casuali. In un determinato istante t non è possibile fare alcuna previsione sull'andamento del segnale all'istante $t + \Delta t$. Il modulo dello spettro di un segnale random di tipo rumore bianco non ha uno spettro piatto. Generando un numero crescente di storie temporali random di tipo rumore bianco e facendo lo spettro di ciascuna, si può ottenere lo spettro medio. Il modulo dello spettro medio tende a diventare piatto al crescere del numero di medie dunque per avere realmente uno spettro piatto al variare della frequenza occorre mediare un elevato numero di spettri di rumore. Il caso reale risulta però essere differente in quanto mentre è possibile realizzare qualcosa di simile ad un rumore bianco almeno in una certa banda di frequenze, più difficile è produrre un impulso che si avvicini al reale: le strutture reali si comportano da filtro cancellando di fatto i contributi a più alta frequenza.



- Sweep = segnale sinusoidale ad ampiezza costante e frequenza variabile con velocità scelta dall'operatore. Il problema di questo ingresso è rimanere un tempo sufficiente a ciascuna frequenza per effettuare la misura: bisogna dunque trovare un modo per salvare istante per istante la sola riga di interesse. A questo scopo si utilizzano i filtri ad inseguimento del segnale, i cosiddetti tracking filter.

Determinazione parametro ω_n e h

Anche in questo caso è possibile tracciare per punti la risposta in frequenza ed interpolare con le espressioni analitiche della risposta, in questo caso, di uno strumento del secondo ordine. L'identificazione di ω_n e h avviene così in modo automatico. Un'ulteriore possibilità dei metodi di identificazione di parametri, sempre più diffusi e potenti, è quella di approssimare i punti sperimentali con l'espressione che descrive il comportamento nel tempo di uno strumento del primo o del secondo ordine: il disegno della storia temporale ricostruita sopra ai punti sperimentali è indice della bontà dell'interpolazione e della scelta del tipo di modello adottato per lo strumento. È anche possibile stimare la funzione di trasferimento del sistema da analizzare per via sperimentale. Approssimare la funzione di trasferimento sperimentale usando l'equazione della funzione di trasferimento analitica. I parametri della funzione di trasferimento analitica che mi permettono di approssimare al meglio la funzione di trasferimento sperimentale, sono la mia stima dei parametri del sistema in esame.