

## FLUIDI VISCOSI: moto in condotta

### **Cadente energetica media per fluidi incompressibili**

Come abbiamo già accennato in precedenza nello studio dei fluidi ideali, nel caso di fluidi reali l'energia meccanica non si conserva ma diminuisce nel senso del moto trasformandosi in calore a causa delle cosiddette perdite energetiche. In quell'occasione abbiamo anche definito la cadente energetica media  $J$  come il modulo della derivata del carico totale medio lungo la coordinata curvilinea  $s$ . Per definizione  $J$  rappresenta la pendenza locale della linea dei carichi totali rispetto all'orizzontale. Vediamo ora come determinare questa grandezza sperimentalmente.

Consideriamo un fluido viscoso incompressibile in moto stazionario. La nostra variabile di stato è la caduta di pressione per unità di lunghezza ovvero il rapporto tra la variazione di pressione e la lunghezza che è uguale al prodotto tra il peso specifico e la cadente stessa:

$$\frac{\Delta p}{L} = \gamma J$$

Scegliamo come variabili di controllo la densità  $\rho$ , la viscosità  $\mu$ , la geometria della condotta  $D$ , la scabrezza  $\mathcal{R}$  e la velocità media  $V$ . La relazione funzionale tra la variabile di stato e le variabili di controllo è del tipo:

$$\frac{\Delta p}{L} = f(\rho, \mu, D, \mathcal{R}, V)$$

Passiamo a un sistema di unità di misura intrinseco al problema (specifico) per ridurre il numero di esperimenti necessari alla determinazione della funzione  $f$ . Scegliamo ora come tre variabili di controllo la geometria della condotta  $D$ , la velocità media  $V$  e la densità  $\rho$  (terna inerziale). Il gruppo  $\Pi$  associato alla caduta di pressione risulta essere (gli esponenti non sono stati calcolati, sono stati dati per noti):

$$\Pi_{\frac{\Delta p}{L}} = \frac{\frac{\Delta p}{L}}{D^\alpha V^\beta \rho^\gamma}$$

$$\alpha = -1 \quad \beta = 2 \quad \gamma = 1$$

$$\Pi_{\frac{\Delta p}{L}} = \frac{\frac{\Delta p}{L}}{\frac{V^2 \rho}{D}} = f^* \left( Re, \frac{\mathcal{R}}{D} \right)$$

Questo rapporto risulta essere funzione del numero di Reynolds e della scabrezza relativa ovvero del rapporto tra la scabrezza  $\mathcal{R}$  e la geometria della condotta  $D$ . Da questa relazione, sapendo che  $\gamma = \rho g$  e dividendo tutto per 2, esplicitando la cadente si può trovare la formula di Darcy-Weisbach:

$$\frac{\frac{\Delta p}{L}}{\frac{V^2 \rho}{D}} = f^* \left( Re, \frac{\mathcal{R}}{D} \right)$$

$$\frac{\Delta p}{L} = \gamma J$$

$$\gamma J = \frac{V^2 \rho}{D} f^* \left( Re, \frac{\mathcal{R}}{D} \right)$$

$$\gamma = \rho g$$

$$\rho g J = \frac{V^2 \rho}{D} f^* \left( Re, \frac{\mathcal{R}}{D} \right)$$

$$J = \frac{V^2}{2gD} f^* \left( Re, \frac{\mathcal{R}}{D} \right) = \frac{V^2}{2gD} \lambda$$

$$\lambda = f^* \left( Re, \frac{\mathcal{R}}{D} \right)$$

$\lambda$  è l'indice di resistenza.

### Indice di resistenza e tipi di moto

L'indice di resistenza assume diverse formulazioni in funzioni del tipo di moto in condotta:

- Moto laminare = in questo caso l'indice di resistenza  $\lambda$  non dipende dalla scabrezza relativa ma dipende solo dal numero di Reynolds:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

- Moto turbolento = in questo caso l'indice di resistenza  $\lambda$  dipende dalla scabrezza relativa e dal numero di Reynolds. In questo caso occorre effettuare un'ulteriore distinzione in funzione dei tipi di tubi per determinare  $\lambda$ :
  - Tubi lisci: in questo caso la scabrezza è nulla. Per determinare l'indice di resistenza in questo tipo di tubo occorre effettuare un ciclo iterativo

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

- Tubi scabri: in questo caso si utilizza la formula di Prandtl-von Karman

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{1}{3.71} \frac{\mathcal{R}}{D} \right)$$

- Tubi commerciali: in questo caso si utilizza la formula di Colebrooke-White

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{1}{3.71} \frac{\mathcal{R}}{D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

In realtà la formula di Colebrooke-White descrive correttamente l'andamento dell'indice di resistenza per tutte le condizioni di moto turbolento. Un'alternativa ampiamente utilizzata prima della diffusione dei calcolatori è il diagramma rappresentante le curve  $\lambda - Re$  interpolanti i dati sperimentali relativi a tubi commerciali di diversa scabrezza relativa equivalente ovvero il diagramma noto come abaco di Moody.

### Cadente energetica media per fluidi comprimibili

Consideriamo ora un fluido viscoso comprimibile in moto stazionario. In questo caso la caduta di pressione (rapporto tra la variazione di pressione e la lunghezza che è uguale al prodotto tra il peso specifico e la cadente stessa) dipende non solo dalla densità  $\rho$ , dalla viscosità  $\mu$ , dalla geometria della condotta  $D$ , dalla scabrezza  $\mathcal{R}$  e dalla velocità media  $V$ , ma dipende anche dalla comprimibilità  $\epsilon$ :

$$\frac{\Delta p}{L} = f(\rho, \mu, D, \mathcal{R}, V, \epsilon)$$

Utilizzando come nel caso precedente una terna inerziale ovvero  $\rho, V, D$  si può determinare il gruppo  $\Pi$  associato alla comprimibilità (anche in questo caso gli esponenti non sono stati calcolati, ma sono stati dati per noti):

$$\Pi_{\epsilon} = \frac{\epsilon}{D^{\alpha} V^{\beta} \rho^{\gamma}}$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad \gamma = 1$$

$$\Pi_{\epsilon} = \frac{\epsilon}{V^2 \rho} = \frac{1}{Ca} = \frac{1}{Ma^2}$$

$$Ca = \frac{V^2 \rho}{\epsilon} = Ma^2$$

Notiamo che il gruppo  $\Pi$  associato alla comprimibilità risulta essere inverso del numero di Cauchy che a sua volta è pari al quadrato del numero di Mach ovvero il rapporto tra la velocità media del fluido e la velocità del suono nel fluido stesso:

- $Ma = 1$  fluidi transonici
- $Ma < 1$  fluidi subsonici
- $Ma > 1$  fluidi supersonici

Per fluidi comprimibili dunque l'indice di resistenza risulta essere funzione oltre che del numero di Reynolds e della scabrezza relativa del numero di Mach dunque:

$$\lambda = f^* \left( Re, \frac{\mathcal{R}}{D}, Ma \right)$$

Sperimentalmente si è notato che esiste una condizione di autosimilarità rispetto a Mach quando  $Ma < 0.3$ .

### Perdite distribuite e localizzate

Come già accennato la diminuzione di energia meccanica che la corrente subisce dopo aver percorso un tratto di condotta a sezione costante e asse rettilineo di lunghezza  $L$  è pari a:

$$\Delta H = J L$$

Questa diminuzione di energia meccanica che si trasforma in calore viene chiamata perdita distribuita. Le perdite distribuite sono dunque vincolate all'esistenza della derivata del carico totale medio rispetto alla coordinata curvilinea  $s$ . Esistono dei casi in cui questa condizione non è verificata: questi casi sono associati a brusche variazioni nella geometria della condotta e/o con la presenza di elementi di disturbo del flusso. Ogni qualvolta esiste una discontinuità nel carico totale medio, con questa che cala bruscamente, si parla di perdite localizzate o concentrate. Sottolineiamo che variazioni discontinue nel carico totale medio sono associate anche alla presenza di macchine operatrici in grado di scambiare energia meccanica con il fluido come le pompe o le turbine.

## FLUIDI VISCOSI: equazioni generali

### Introduzione

Nel capitolo sulla dinamica abbiamo sottolineato che:

- Equazione di continuità → 1 eq. scalare → 4 incognite ( $\rho, v_x, v_y, v_z$ )
- Bilancio quantità di moto → 3 eq. scalare → 13 incognite ( $\rho, v_x, v_y, v_z, 9$  componenti di  $\bar{\phi}$ )
- Bilancio momento quantità di moto → 9 eq. scalare → 9 incognite (componenti di  $\bar{\phi}$ )

Quindi in totale otteniamo 13 equazioni in 13 incognite. Le 9 equazioni scalari sono 9 legami costitutivi che legano gli elementi del tensore degli sforzi alle deformazioni subite dal fluido.

### Tensore degli sforzi per fluidi stokesiani

Approfondiamo meglio questi legami costitutivi studiando i fluidi Stokesiani ovvero fluidi per cui:

- Sforzi non dipendono dalle deformazioni ma solo dalle velocità di deformazioni che sono identificate dal tensore delle velocità di deformazione  $\bar{D}$ , di cui parleremo a breve). Approfondiamo brevemente la natura del tensore delle velocità di deformazioni
- Quando la velocità è nulla il tensore degli sforzi si riduce al caso statico:  $\bar{\phi} = p\bar{I}$
- Le funzioni che legano gli sforzi alle velocità di deformazioni sono indipendenti dal sistema di riferimento adottato

Queste tre caratteristiche sono soddisfatte quando il generico elemento del tensore degli sforzi può essere scritto come:

$$\phi_{i,j} = p\delta_{i,j} + f(D_{i,j}, I_1, I_2, I_3)$$

dove  $I_1$  è la traccia,  $I_2$  è l'invariante quadratico e  $I_3$  è il determinante della matrice  $\bar{D}$ .

### Gradiente della velocità

Prima procedere con lo studio e introdurre i fluidi newtoniani così da semplificare ulteriormente il problema occorre comprendere cosa sono le velocità di deformazioni.

Per comprendere ciò consideriamo un punto  $P$  appartenente a un fluido che si muove. Indichiamo con  $d\bar{x}$  la distanza tra il punto e il centro del sistema di riferimento. Se si sceglie un punto  $P$  sufficientemente vicino ad  $O$  si può scrivere la velocità di  $P$  come espansione in serie del primo ordine:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_0 + dx \frac{\partial \bar{v}_P}{\partial x} + dy \frac{\partial \bar{v}_P}{\partial y} + dz \frac{\partial \bar{v}_P}{\partial z} = \bar{v}_0 + d\bar{x} \cdot \nabla \bar{v}$$

dove:

$$d\bar{x} = [dx \quad dy \quad dz] \quad \nabla \bar{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{v}_P}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}_P}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{v}_P}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Possiamo ora scrivere il gradiente del vettore velocità in termini indiciali in modo tale da mettere in evidenza due termini (due tensori): un simmetrico  $D_{i,j}$  e uno emisimmetrico  $\Omega_{i,j}$ :

$$(\nabla \bar{v})_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\nabla \bar{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \bar{D} + \bar{\Omega}$$

dove  $\bar{\Omega}$  è detto tensore delle rotazioni rigide mentre  $\bar{D}$  è detto tensore delle velocità delle deformazioni; le loro espressioni sono le seguenti:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Analizziamo ora il caso piano per cercare di comprendere che cosa siano effettivamente e cosa rappresentino i termini presenti in questi tensori:

- Termini diagonali di  $\bar{D}$  = per comprendere il significato dei termini diagonali imponiamo che i termini extradiagonali di  $\bar{D}$  siano nulli così da ottenere:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Prendiamo ora quattro punti nel sistema di riferimento in modo da identificare un rettangolo in un certo istante temporale. Ipotizziamo poi che dopo un certo intervallo temporale  $dt$  la velocità del vertice situato nell'origine sia nulla e scriviamo le velocità degli altri punti del rettangolo:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_0 + \left( 0 + dx \frac{\partial v_x}{\partial x}, 0 + dx \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = dx \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$PP' = \bar{v}_P dt = dx \frac{\partial v_x}{\partial x} dt$$

$$\bar{v}_R = \bar{v}_0 + \left( 0 + dy \frac{\partial v_x}{\partial y}, 0 + dy \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = dy \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$RR' = \bar{v}_R dt = dy \frac{\partial v_y}{\partial y} dt$$

Il nuovo rettangolo che si ottiene è una dilatazione di quello iniziale dunque capiamo che i termini diagonali sono legati a variazioni di superficie ma non variazioni di forma (in 2D), analogamente possiamo dedurre per in 3D sono legati a variazione di volume ma non variazione di forme. Possiamo ora ottenere dei variazioni percentuali cos' da svincolarci dalle grandezze iniziali e ottenere così un allungamento unitario; per fare ciò dividiamo l'allungamento per la lunghezza iniziale del lato del rettangolo:

$$\frac{PP'}{OP} = \frac{dx \frac{\partial v_x}{\partial x} dt}{dx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} dt = d\varepsilon_x$$

Da questa relazione otteniamo che:

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Effettuando il medesimo procedimento per gli altri lati si ottiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}$$

Compreso questo possiamo riprendere un concetto che avevamo introdotto nella dinamica dei fluidi parlando dell'equazione di continuità in forma lagrangiana; avevamo infatti detto che il bilancio di massa in questo forma si ricavava come:

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

$$M = \rho W$$

$$\frac{d(\rho W)}{dt} = \frac{dW}{dt} \rho + \frac{d\rho}{dt} W = 0$$

$$\frac{dW}{dt} \rho \frac{1}{W} + \frac{d\rho}{dt} W \frac{1}{W} = 0$$

$$\rho \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

E avevamo detto che:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \text{variazione percentuale di volume} = \nabla \cdot \vec{v}$$

Capiamo ora come mai ciò è vero; calcoliamo il volume del parallelepipedo finale meno quello iniziale e dunque calcoliamo la differenza di volume  $dW$ :

$$\begin{aligned} dW &= \left( dx + dx \frac{\partial v_x}{\partial x} dt \right) \left( dy + dy \frac{\partial v_y}{\partial y} dt \right) \left( dz + dz \frac{\partial v_z}{\partial z} dt \right) - dx dy dz = \\ &= dx dy dz dt \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = W dt \nabla \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

- Termini extradiagonali di  $\bar{D}$  = per comprendere il significato dei termini extradiagonali imponiamo ora che i termini extradiagonali di  $\bar{D}$  siano nulli così da ottenere:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Prendiamo ora quattro punti nel sistema di riferimento in modo da identificare un rettangolo in un certo istante temporale. Ipotizziamo poi che dopo un certo intervallo temporale  $dt$  la velocità del vertice situato nell'origine sia nulla e scriviamo le velocità degli altri punti del rettangolo:

$$\bar{v}_P = \left( v_{0,x} + dx \frac{\partial v_x}{\partial x}, v_{0,y} + dx \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \left( 0, dx \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$PP' = \bar{v}_P dt = dx \frac{\partial v_y}{\partial x} dt$$

$$\bar{v}_R = \left( v_{0,x} + dy \frac{\partial v_x}{\partial y}, v_{0,y} + dy \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \left( dy \frac{\partial v_x}{\partial y}, 0 \right)$$

$$RR' = \bar{v}_R dt = dy \frac{\partial v_x}{\partial y} dt$$

Si nota che in questo caso si ha una variazione di angoli; stimiamo questa variazione:

$$\partial \gamma_z = -(\alpha + \beta) = -(\tan \alpha + \tan \beta) = -\frac{\partial v_y}{\partial x} dt - \frac{\partial v_x}{\partial y} dt$$

$$\tan \alpha = \frac{PP'}{OP} = \frac{dx \frac{\partial v_y}{\partial x} dt}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt \quad \tan \beta = \frac{RR'}{OP} = \frac{dy \frac{\partial v_x}{\partial y} dt}{dy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} dt$$

Dividendo tutto per l'intervallo temporale così da ottenere dei valori percentuali si ottiene:

$$\frac{\partial \gamma_z}{dt} = \frac{-\frac{\partial v_y}{\partial x} dt - \frac{\partial v_x}{\partial y} dt}{dt} = -\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

A meno di  $\frac{1}{2}$  questo valore corrisponde a quello presente in  $\bar{D}$ . Comprendiamo dunque che gli elementi extradiagonali del tensore delle velocità di deformazioni rappresenta la velocità angolare di deformazione ovvero la velocità con cui si deforma un angolo. Possiamo dunque riscrivere il tensore delle velocità di deformazioni come:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_z}{\partial t} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_z}{\partial t} & \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} & \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Termini di  $\bar{\bar{\Omega}}$  = rappresentano velocità di rotazioni rigide:

$$\bar{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

### Tensore degli sforzi per fluidi newtoniani

A questo punto limitiamo il nostro studio ai soli fluidi Newtoniani ovvero fluidi per i quali la dipendenza tra il tensore degli sforzi  $\bar{\bar{\phi}}$  da quello delle velocità di deformazione  $\bar{\bar{D}}$  è lineare. Avendo circoscritto lo studio a questi specifici tipi di fluidi possiamo riscrivere l'espressione del generico elemento del tensore degli sforzi (in quanto  $f$  sarà una funzione lineare):

$$\phi_{i,j} = p\delta_{i,j} + a_{i,j}D_{i,j} + b_{i,j}I_1$$

In questa espressione non sono presenti l'invariante quadratico  $I_2$  e quello cubico  $I_3$  (determinante) perché il tensore degli sforzi non dipende linearmente da essi e dunque si possono trascurare sotto l'ipotesi di studiare un fluido newtoniano. Sapendo che la traccia del tensore delle velocità di deformazione risulta uguale alla divergenza delle velocità l'equazione si può scrivere l'espressione sopra riportata in forma tensoriale:

$$I_1 = \nabla \cdot \bar{v}$$

$$\bar{\bar{\phi}} = (p + b\nabla \cdot \bar{v})\bar{I} + a\bar{\bar{D}}$$

Cerchiamo ora di capire cosa sono  $a$  e  $b$ :

- Il valore  $a$  ha a che fare con gli sforzi tangenziali, è l'indice della resistenza che il fluido oppone a cambiamenti di forma e possiamo determinarlo nel seguente modo tenendo presente che sperimentalmente  $v_x = 0$ :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\phi_{xy} = aD_{yx} = a \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = a \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau = -\phi_{xy}$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = -a \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\mu = -a \frac{1}{2}$$

$$a = -2\mu$$

- Per determinare il termine  $b$  (viscosità di dilatazione) che esprime la variazione percentuale di volume nell'unità di tempo ed è indice della resistenza che il fluido oppone a variazioni di volume, occorre per prima cosa calcolare la traccia del tensore degli sforzi:



$$tr(\bar{\Phi}) = (p + b\nabla \cdot \bar{v})tr(\bar{I}) + atr(\bar{D}) = (p + b\nabla \cdot \bar{v})3 + a\nabla \cdot \bar{v} = 3p + 3b\nabla \cdot \bar{v} + a\nabla \cdot \bar{v}$$

In statica  $tr(\bar{\Phi}) = 3p$  e  $\nabla \cdot \bar{v} = tr(\bar{D})$  e  $a = -2\mu$  dunque:

$$tr(\bar{\Phi}) = 3p + 3b\nabla \cdot \bar{v} + a\nabla \cdot \bar{v}$$

$$3p = 3p + 3btr(\bar{D}) + atr(\bar{D})$$

$$0 = +3btr(\bar{D}) - 2\mu tr(\bar{D})$$

$$0 = +3b - 2\mu$$

$$b = \frac{2}{3}\mu$$

Noti a e b possiamo scrivere il tensore degli sforzi:

$$\bar{\Phi} = \left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v}\right)\bar{I} - 2\mu\bar{D}$$

### Equazioni Stokes

Abbiamo così determinato la reologia dei fluidi Newtoniani. Calcoliamo ora la divergenza del tensore degli sforzi così da avere poi il termine necessario per riscrivere il bilancio della quantità di moto in entrambe le forme (euleriana e lagrangiana):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\Phi} &= \nabla \left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v}\right) - 2\mu\nabla \cdot \bar{D} = & \nabla \cdot \bar{D} &= \frac{1}{2}\nabla^2\bar{v} + \frac{1}{2}\nabla(\nabla \cdot \bar{v}) \\ &= \nabla \left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v}\right) - 2\mu \left(\frac{1}{2}\nabla^2\bar{v} + \frac{1}{2}\nabla(\nabla \cdot \bar{v})\right) = \\ &= \nabla \left(p - \frac{1}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v}\right) - \mu\nabla^2\bar{v} \end{aligned}$$

Inseriamo ora questa relazione nel bilancio di quantità di moto in forma euleriana non conservativa:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} &= -\rho g \nabla \bar{z} - \nabla \cdot \bar{\Phi} \\ \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} &= -\rho g \nabla \bar{z} - \left[ \nabla \left(p - \frac{1}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v}\right) - \mu\nabla^2\bar{v} \right] \\ \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} &= -\rho g \nabla \bar{z} - \nabla \left(p - \frac{1}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v}\right) + \mu\nabla^2\bar{v} \end{aligned}$$

Questa equazione a sistema con l'equazione di continuità e l'equazione di stato consente di risolvere completamente la dinamica isoterma dei fluidi newtoniani comprimibili. Queste tre equazioni sono dette equazioni di Stokes per i fluidi comprimibili in forma indefinita:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} = -\rho g \nabla \bar{z} - \nabla \left(p - \frac{1}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v}\right) + \mu\nabla^2\bar{v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \bar{v} = 0 \\ \rho = \rho(p, T) \end{array} \right.$$

## Equazioni Navier-Stokes in forma indefinita

Se il fluido è incomprimibile le equazioni di Stokes diventano le equazioni di Navier-Stokes che si semplificano dato che  $\rho = cost$  e dunque non è necessaria la terza equazione del sistema:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} = -\rho g \nabla \bar{z} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v} \\ \nabla \bar{v} = 0 \end{cases}$$

$$-\rho g \nabla \bar{z} = \nabla p_{stat}$$

$$-\rho g \nabla \bar{z} - \nabla p = \nabla p_{stat} - \nabla p = -\nabla p_e$$

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} = -\nabla p_e + \mu \nabla^2 \bar{v} \\ \nabla \bar{v} = 0 \end{cases}$$

Le equazioni di Navier-stokes sono equazioni differenziali alle derivate parziali che necessitano, per essere risolte, di condizioni iniziali e condizioni al contorno. Queste equazioni non possono essere risolte per via analitica se non in casi estremamente semplici che vedremo di seguito a causa della:

- Non linearità = per via delle inerzie convettive  $\rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v}$
- Ellitticità = dovute a  $\mu \nabla^2 \bar{v}$

## Equazioni Navier-Stokes in forma globale

Ricaviamo ora la formula di navier-Stokes globale integrando sul volume la formula indefinita:

$$\int_W \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dW + \int_W \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} dW = - \int_W \rho g \nabla \bar{z} dW - \int_W \nabla p dW + \int_W \mu \nabla^2 \bar{v} dW$$

$$- \int_W \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} dW = Leibnitz = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_W \rho \bar{v} dW \right) = \bar{I}$$

$$\int_W \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} dW = \bar{M}$$

$$- \int_W \rho g \nabla \bar{z} dW = \bar{G}$$

$$- \int_W \nabla p dW = \bar{\Pi}_p$$

$$\int_W \mu \nabla^2 \bar{v} dW = \bar{\Pi}_\mu$$

Otteniamo quindi la forma globale come:

$$\bar{I} + \bar{M} + \bar{G} + \bar{\Pi}_p + \bar{\Pi}_\mu = \bar{0}$$

dove:

- $\bar{I}$  vettore inerzie locali
- $\bar{M}$  flusso di quantità di moto. Ha un'origine inerziale ed è sempre entrante
- $\bar{G}$  forza peso del fluido contenuto nel volume di controllo
- $\bar{\Pi}_p$  risultante degli sforzi

- $\overline{\Pi}_\mu$  risultante degli sforzi viscosi

### Equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale

Le equazioni fino a qui ricavate sono equazioni dimensionali, può essere conveniente esprimerle in forma adimensionale (la derivazione della forma adimensionale è complessa)

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} - \rho g \nabla \tilde{z} = \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v})$$

$$-\frac{P}{L} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{V}{L^2} \mu \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} - \rho g \frac{L}{L} \tilde{\nabla} \tilde{z} = \frac{V}{T} \frac{\partial(\rho \tilde{v})}{\partial \tilde{t}} + \frac{V^2}{L} \tilde{\nabla} \cdot (\rho \tilde{v} \tilde{v})$$

$$\frac{-\frac{P}{L} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{V}{L^2} \mu \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} - \rho g \frac{L}{L} \tilde{\nabla} \tilde{z}}{\rho V^2 / L} = \frac{\frac{V}{T} \frac{\partial(\rho \tilde{v})}{\partial \tilde{t}} + \frac{V^2}{L} \tilde{\nabla} \cdot (\rho \tilde{v} \tilde{v})}{\rho V^2 / L}$$

$$-\frac{P}{\rho V^2} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{LV\rho} \mu \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} - \rho g \frac{L}{\rho V^2} \tilde{\nabla} \tilde{z} = \frac{L}{\rho TV} \frac{\partial(\rho \tilde{v})}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\rho} \tilde{\nabla} \cdot (\rho \tilde{v} \tilde{v})$$

$$-\frac{P}{\rho V^2} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{\mu}{LV\rho} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} - \frac{gL}{V^2} \tilde{\nabla} \tilde{z} = \frac{L}{TV} \frac{\partial(\tilde{v})}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{v} \tilde{v})$$

- $\frac{P}{\rho V^2} = Eu$  numero di Eulero = rapporto tra forze di pressione e forze di inerzia
- $\frac{\mu}{LV\rho} = \frac{1}{Re}$  numero di Reynolds
- $\frac{gL}{V^2} = \frac{1}{Fr^2}$  numero di Froude = rapporto tra forze di inerzia e forze peso
- $\frac{L}{TV} = St$  numero di Strouhal

$$-Eu \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} - \frac{1}{Fr^2} \tilde{\nabla} \tilde{z} = St \frac{\partial(\tilde{v})}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{v} \tilde{v})$$

Utilizzando  $p_e$ , il numero di Froude sparisce, inoltre  $Eu = 1$ ,

$$-\tilde{\nabla} \tilde{p}_e + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} = St \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{v} \tilde{v})$$

Se il moto fosse stazionario:

$$-\tilde{\nabla} \tilde{p}_e + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{v} \tilde{v})$$

Quindi le equazioni di Navier Stokes adimensionalizzate per un moto stazionario sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{v} = -\tilde{\nabla} \tilde{p}_e + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} \\ \tilde{\nabla} \tilde{v} = 0 \end{cases}$$

### Soluzioni analitiche: flusso piano di Couette

Consideriamo due lastre piane indefinite parallele poste a distanza  $\delta$  di cui una ferma e l'altra in moto con velocità costante  $V$ ; tra le due piastre è presente un fluido newtoniano incomprimibile di densità  $\rho$  e viscosità  $\mu$ . Vista che una delle due lastre si muove rispetto all'altra anche il fluido

nell'intercapedine sarà in movimento per via della condizione di aderenza dei fluidi reali alla parete. Ipotizziamo che:

- La velocità del fluido abbia solo componente in direzione  $x$  e quindi di avere moto laminare:  $\vec{v} = (u, 0)$
- Il gradiente di pressione lungo la direzione  $x$  sia nullo  $\partial p_e / \partial x = 0$

Risolviamo ora le equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale:

- Equazione di continuità (I° equazione di Navier-Stokes): riducendo questa equazione per il moto piano e imponendo nulla la componente della velocità lungo l'asse  $\check{y}$  si ottiene:

$$\check{v} \check{v} = 0$$

$$\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} + \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{y}} = 0$$

$$\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} = 0$$

Questa equazione che afferma che l'unica componente di velocità presente, se varia, varia solo in direzione  $\check{y}$ . Il nostro obiettivo a questo punto è determinare il profilo di velocità ovvero come  $\check{u}$  varia in funzione di  $\check{y}$ .

- Bilancio di quantità di moto (II° equazione di Navier-Stokes): riduciamo questa equazione per il moto piano proiettandola lungo le direzioni  $\check{x}$  e  $\check{y}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{t}} + \check{u} \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} + \check{v} \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{y}} = -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \check{x}^2} + \frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \check{y}^2} \right) \\ \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{t}} + \check{u} \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{x}} + \check{v} \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{y}} = -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{y}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \check{v}}{\partial \check{x}^2} + \frac{\partial^2 \check{v}}{\partial \check{y}^2} \right) \end{cases}$$

Effettuiamo ora una serie di semplificazioni:

Semplifico i termini inerziali perché il moto è stazionario

Per quanto ricavato dalla prima equazione di Navier-Stokes (equazione di continuità) si semplifica anche questi termini

Per l'ipotesi iniziale secondo cui gradiente di pressione lungo la direzione  $x$  sia nullo si annulla anche questo termine

$$\begin{cases} \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{t}} + \check{u} \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} + \check{v} \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{y}} = -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \check{x}^2} + \frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \check{y}^2} \right) \\ \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{t}} + \check{u} \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{x}} + \check{v} \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{y}} = -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{y}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \check{v}}{\partial \check{x}^2} + \frac{\partial^2 \check{v}}{\partial \check{y}^2} \right) \end{cases}$$

Semplifico i termini in cui è presenta la velocità  $\check{v}$  e la sua derivata perché il moto è laminare

Dunque, il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \check{y}^2} \\ 0 = -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{y}} \end{cases}$$

Integrando due volte la prima equazione del sistema si ottiene:

$$\check{u} = A\check{y} + B$$

Le costanti A e B dovute alla doppia integrazione si determinano con le condizioni al contorno ovvero la condizione di no-slip (aderenza) alla parete:

$$u(0) = 0 \rightarrow \check{u}(0) = 0$$

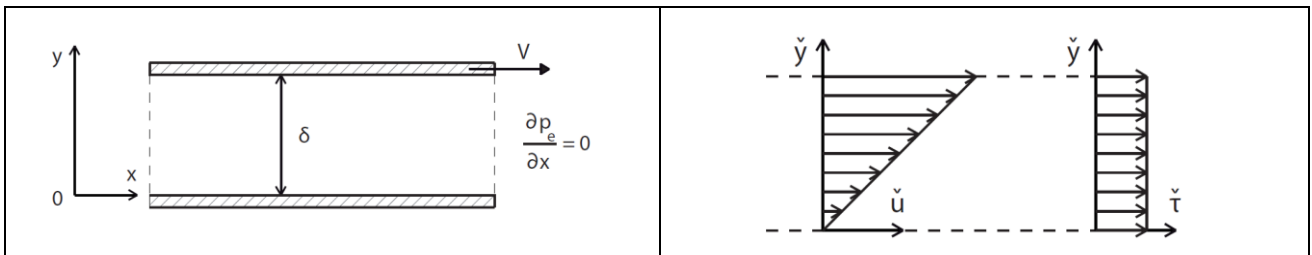
$$u(\delta) = V \rightarrow \check{u}(1) = 1$$

Si ottiene così:

$$\check{u} = \check{y}$$

Possiamo inoltre determinare lo sforzo tangenziale:

$$\tau = \frac{1}{Re} \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{y}} = \frac{1}{Re}$$



### Soluzioni analitiche: flusso piano di Poiseuille

Consideriamo due lastre piane indefinite parallele poste a distanza  $\delta$  l'una dall'altra tra le quali si trova un fluido pesante newtoniano incomprimibile di densità  $\rho$  e viscosità  $\mu$ . Entrambe le lastre sono ferme. Ipotizziamo:

- La velocità del fluido abbia solo componente in direzione  $x$  e quindi di avere moto laminare:  $\vec{v} = (u, 0)$
- Il gradiente di pressione lungo la direzione  $x$  sia costante  $\partial p_e / \partial x = \text{cost}$

Risolviamo ora le equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale:

- Equazione di continuità (I° equazione di Navier-Stokes): riducendo questa equazione per il moto piano e imponendo nulla la componente della velocità lungo l'asse  $\check{y}$  si ottiene:

$$\check{\nabla} \check{v} = 0$$

$$\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} + \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{y}} = 0$$

$$\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} = 0$$

- Bilancio di quantità di moto (II° equazione di Navier-Stokes): riduciamo questa equazione per il moto piano proiettandola lungo le direzioni  $\check{x}$  e  $\check{y}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \end{cases}$$

Effettuiamo ora una serie di semplificazioni:

Semplifico i termini inerziali perché il moto è stazionario

Per quanto ricavato dalla prima equazione di Navier-Stokes (equazione di continuità) si semplifica anche questi termini

Semplifico i termini in cui è presente la velocità  $\tilde{v}$  e la sua derivata perché il moto è laminare

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \end{cases}$$

Dunque, il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \\ 0 = -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{y}} \end{cases}$$

Integrando due volte la prima equazione si ottiene una soluzione del tipo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= Re \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} \tilde{y} + A \\ \tilde{u} &= \frac{Re}{2} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} \tilde{y}^2 + A \tilde{y} + B \end{aligned}$$

$A, B$  sono le costanti di integrazioni da determinare con le condizioni al contorno e la condizione di simmetrica:

$$\tilde{u}(0) = 0$$

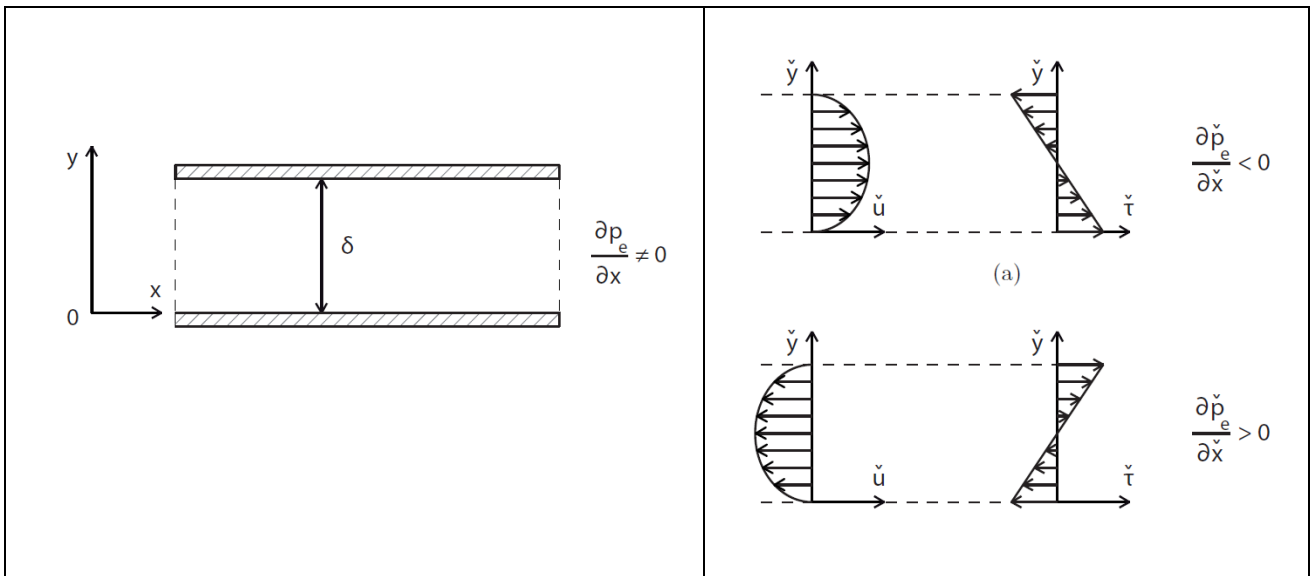
$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \text{quando} \quad \tilde{y} = \frac{1}{2}$$

Si ottiene dunque che  $A = -\frac{Re}{2} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}}$  e  $B = 0$  quindi il profilo di velocità risulta essere:

$$\tilde{u} = \frac{Re}{2} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} \tilde{y}^2 - \frac{Re}{2} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} \tilde{y} = -\frac{Re}{2} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} \tilde{y}(1 - \tilde{y})$$

Possiamo inoltre determinare lo sforzo tangenziale:

$$\tau = \frac{1}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} (1 - 2\tilde{y})$$



### Soluzioni analitiche: flusso piano di Couette-Poiseuille

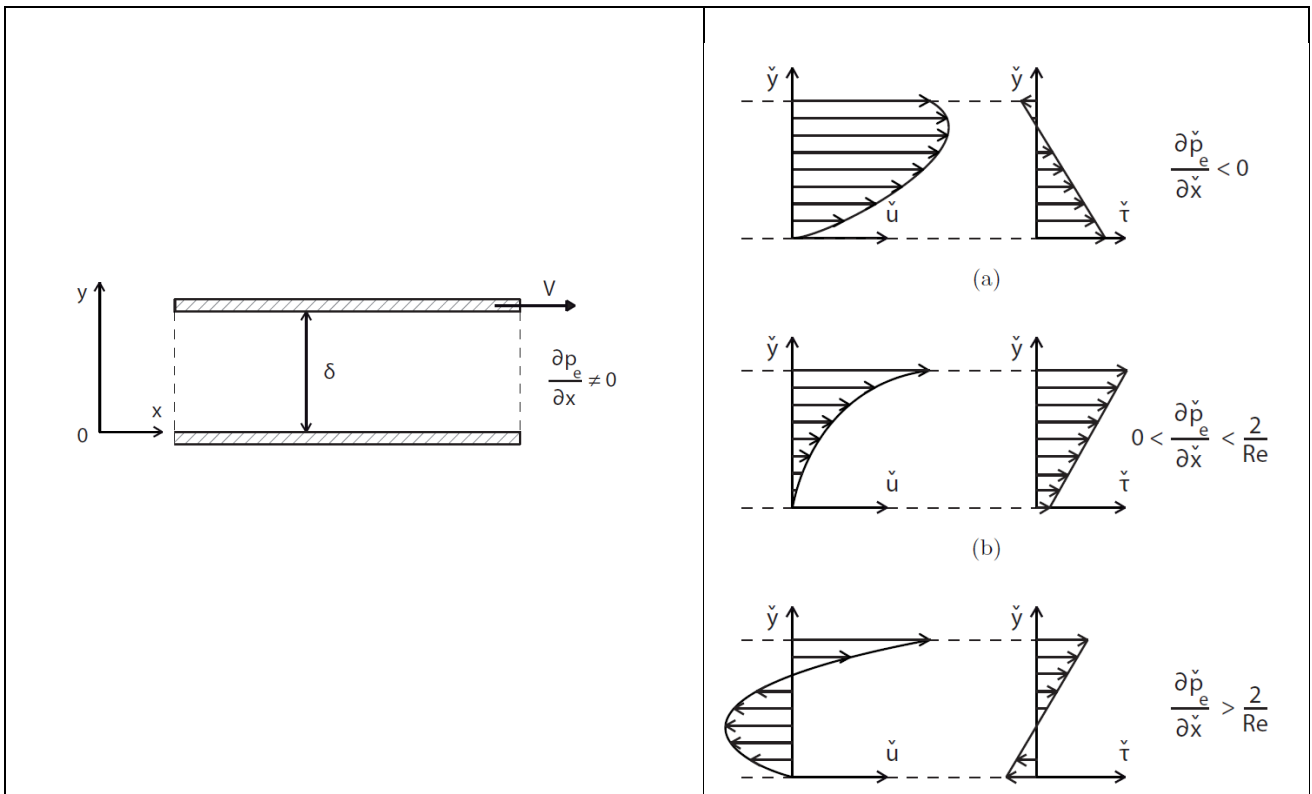
Consideriamo due lastre piane indefinite parallele poste a distanza  $\delta$  l'una dall'altra tra le quali si trova un fluido pesante newtoniano incomprimibile di densità  $\rho$  e viscosità  $\mu$ . La lastra superiore si muove con velocità  $v$  mentre quella inferiore è ferma. Visto che una delle due lastre è in moto, per la condizione di aderenza si metterà in movimento anche il fluido. Ipotizziamo che:

- La velocità del fluido abbia solo componente in direzione  $x$  e quindi di avere moto laminare:  $\vec{v} = (u, 0)$
- Il gradiente di pressione lungo la direzione  $x$  sia costante  $\partial p_e / \partial x = \text{cost}$

Potremmo risolvere le equazioni di Navier-Stokes adimensionalmente come abbiamo fatto in precedenza ma è sufficiente ricordarsi che vale il principio di sovrapposizione degli effetti quindi è possibile dire a priori che la soluzione è del tipo:

$$\tilde{u} = -\frac{Re}{2} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} \tilde{y}(1 - \tilde{y}) + \tilde{y}$$

Dove il termine in rosso è la soluzione del flusso piano di **Poiseuille** mentre quello blu è la soluzione del flusso piano di **Couette**. È dunque possibile disegnare i diversi profili di velocità e ricavare poi gli sforzi tangenziali.



### Soluzioni analitiche: moto di Poiseuille in condotta (forma indefinita dimensionale)

Risolviamo ora il caso di un fluido newtoniano incompressibile che si muove in condizioni di moto laminare con portata  $Q$  costante in una condotta cilindrica a sezione circolare di diametro  $D$  e asse rettilineo inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo  $\psi$ . Ipotizziamo che:

- l'unica componente di velocità non nulla è quella in direzione  $x$  così che  $\bar{v} = u\hat{i}$  quindi il moto è laminare

Risolviamo per caso questo le equazioni di Navier-Stokes in forma indefinita dimensionale (nel prossimo capitolo le studiamo in forma globale):

- Equazione di continuità (I° equazione di Navier-Stokes): non essendo più nel caso piano l'equazione di continuità tridimensionale sarà caratterizzata dalla presenza di tre componenti:  
riducendo questa equazione per il moto piano e imponendo nulla la componente della velocità lungo l'asse  $\check{y}$  si ottiene:

$$\nabla \bar{v} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Per l'ipotesi di laminarità del moto si ha che  $v = w = 0$  quindi l'equazione si riduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Bilancio di quantità di moto (II° equazione di Navier-Stokes): anche questa equazione non può essere ridotta al caso piano perché stiamo considerando un problema tridimensionale. In termini dimensionali il bilancio di quantità di moto diventa:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} = -\rho g \nabla \check{z} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v}$$



$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho w \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial x} + \rho w \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \end{cases}$$

Effettuiamo ora una serie di semplificazioni:

Considerando che il moto è stazionario si semplificano i seguenti termini

Per quanto ricavato dalla prima equazione di Navier-Stokes (equazione di continuità) si semplificano questi termini

Dato che per ipotesi il moto è laminare e quindi  $v = w = 0$  si semplificano anche questi termini

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho w \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial x} + \rho w \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \end{cases}$$

Il sistema si riduce dunque a:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \end{cases}$$

Dividendo ora tutto per il peso specifico  $\gamma = \rho g$  e arrangiando i termini si ha che:

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \mu \nabla^2 u \\ 0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\gamma} \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \\ 0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\gamma} \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \mu \nabla^2 u \\ 0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \\ 0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = \frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 u \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni del sistema ci dicono che la distribuzione delle pressioni è idrostatica sulla sezione trasversale al flusso: si tratta infatti di una corrente gradualmente variata. Per risolvere la prima equazione del sistema e ricavare così i profili di velocità occorre passare alle coordinate cilindriche ottenendo:

$$-\frac{\gamma J}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

Integrando una volta si ottiene:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\gamma J r^2}{\mu} + A$$

Per simmetria la costante di integrazione A è nulla perché la velocità deve necessariamente presentare un massimo in corrispondenza dell'asse, integrando una seconda volta si ottiene:

$$u = -\frac{\gamma J r^2}{\mu} + B$$

Imponendo le condizioni di aderenza della parete si ricava B:

$$u(R) = 0 \quad \rightarrow \quad B = \frac{\gamma J R^2}{\mu} + \frac{\gamma J R^2}{\mu}$$

$$u = -\frac{\gamma J r^2}{\mu} + \frac{\gamma J R^2}{\mu} + \frac{\gamma J R^2}{\mu}$$

$$u = \frac{\gamma J R^2 - r^2}{\mu} + \frac{\gamma J R^2}{\mu}$$

L'andamento di  $u$  è di tipo parabolico. Quindi nel moto laminare la distribuzione di velocità è parabolica.

### Soluzioni analitiche: moto di Poiseuille in condotta (forma globale)

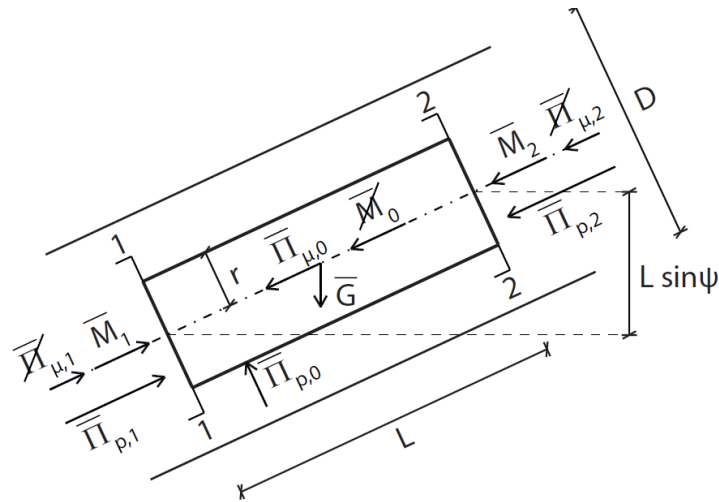
Risolviamo ora il caso di un fluido newtoniano incomprimibile che si muove in condizioni di moto laminare con portata  $Q$  costante in una condotta cilindrica a sezione circolare di diametro  $D$  e asse rettilineo inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo  $\psi$ . Ipotizziamo che:

- l'unica componente di velocità non nulla è quella in direzione  $x$  così che  $\vec{v} = u\hat{i}$  quindi il moto è laminare

Risolviamo per caso questo le equazioni di Navier-Stokes in forma globale: consideriamo un volume di controllo costituito da un cilindro coassiale con la condotta di raggio  $r$  e lunghezza  $L$ . Suddividiamo la superficie di contorno del volume di controllo in due superfici piane 1,2, coincidenti con le basi del cilindro, e una superficie curva 0, corrispondente con quella laterale. Appliciamo dunque l'equazione di Navier Stokes in forma globale a questo volume di controllo:

$$\overline{\Pi_p} + \overline{\Pi_\mu} + \overline{G} + \overline{I} + \overline{M} = \overline{0}$$

$$\overline{\Pi_{p,1}} + \overline{\Pi_{p,2}} + \overline{\Pi_{p,0}} + \overline{\Pi_{\mu,1}} + \overline{\Pi_{\mu,2}} + \overline{\Pi_{\mu,0}} + \overline{M_1} + \overline{M_2} + \overline{M_0} + \overline{I} + \overline{G} = \overline{0}$$



Possiamo notare che:

- La risultante delle iniezioni locali è nulla perché il problema è stazionario:  $\overline{I} = \overline{0}$
- Il flusso di quantità di moto attraverso la superficie laterale 0 è nullo perché velocità e versore sono tra loro perpendicolari e quindi hanno prodotto nullo:  
 $\overline{M_0} = \overline{0}$
- Per la continuità il flusso di quantità di moto attraverso le due superfici piane è il medesimo e quindi la loro somma è complessivamente nulla  
 $\overline{M_1} + \overline{M_2} = \beta \rho V^2 \pi r^2 \hat{i} - \beta \rho V^2 \pi r^2 \hat{i} = \overline{0}$
- La risultante degli sforzi viscosi sulla superficie piana 1 è nulla visto che per continuità la derivata della velocità in direzione x è ovunque nulla  
 $\overline{\Pi_{\mu,1}} = \overline{0}$
- La risultante degli sforzi viscosi sulla superficie piana 2 è nulla visto che per continuità la derivata della velocità in direzione x è ovunque nulla  
 $\overline{\Pi_{\mu,2}} = \overline{0}$

Semplificando ottengo dunque la seguente equazione:

$$\overline{\Pi_{p,1}} + \overline{\Pi_{p,2}} + \overline{\Pi_{p,0}} + \overline{\Pi_{\mu,0}} + \overline{G} = \overline{0}$$

La proietto ora lungo l'asse x:

$$\overline{\Pi_{p,1x}} + \overline{\Pi_{p,2x}} + \overline{\Pi_{p,0x}} + \overline{\Pi_{\mu,0x}} + \overline{G_x} = \overline{0}$$

$$\overline{\Pi_{p,1x}} = p_1 \pi r^2 \hat{i}$$

$$\overline{\Pi_{p,2x}} = -p_2 \pi r^2 \hat{i}$$

$$\overline{\Pi_{p,0x}} = \overline{0}$$

$$\overline{\Pi_{\mu,0x}} = -\tau 2\pi r L \hat{i}$$

$$\overline{G_x} = -\gamma \pi r^2 L \sin \psi \hat{i}$$

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r L - \gamma \pi r^2 L \sin \psi = \overline{0}$$

$$L \sin \psi = \tilde{z}_2 - \tilde{z}_1$$

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r L - \gamma \pi r^2 (\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) = \bar{0}$$

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r L - \gamma \pi r^2 \tilde{z}_2 + \gamma \pi r^2 \tilde{z}_1 = \bar{0}$$

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \gamma \pi r^2 \tilde{z}_2 + \gamma \pi r^2 \tilde{z}_1 = \tau 2\pi r L$$

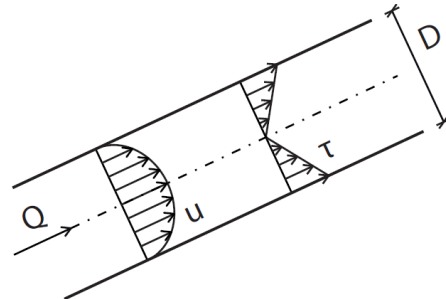
$$\gamma \pi r^2 \left[ \left( \tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right] = \tau 2\pi r L$$

$$\left( \tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = JL$$

$$\gamma \pi r^2 JL = \tau 2\pi r L$$

$$\gamma r J = \tau 2$$

$$\tau = \frac{\gamma r J}{2}$$



Cioè vuol dire che lo sforzo tangenziale viscoso è distribuito linearmente con la coordinata radiale, è nullo in corrispondenza dell'asse e massimo in corrispondenza della parete condotta.