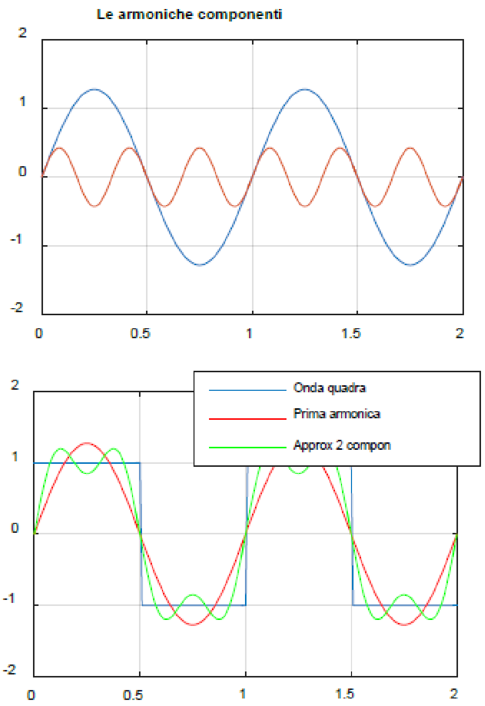
ANALISI DI FOURIER

Introduzione

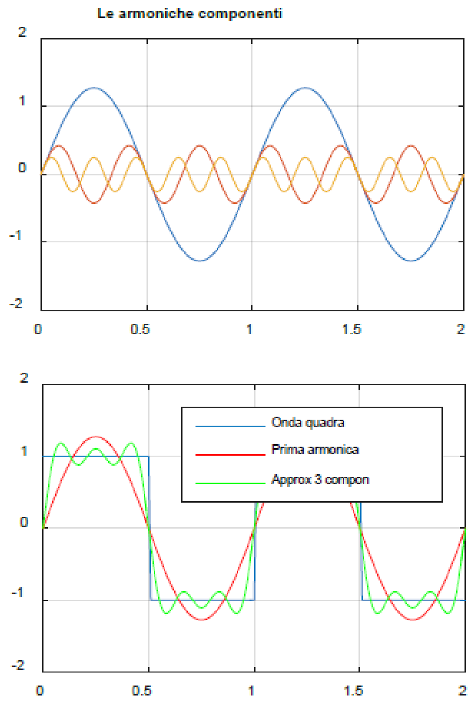
Sotto ipotesi molto larghe un qualsiasi segnale può essere visto come somma di un numero, eventualmente infinito, di componenti armoniche. Ciò permette dunque si scomporre un segnale in somma si tanti sinusoidi cioè in somma si tanti componenti armoniche. Ad ogni componente armonica è associata una frequenza di oscillazione. Quini è possibile studiare quali e quante frequenza sono presenti nel segnale. La trasformata di Fourier è una trasformazione matematica reversibile come vedremo più avanti.

Esempio dell’onda quadra

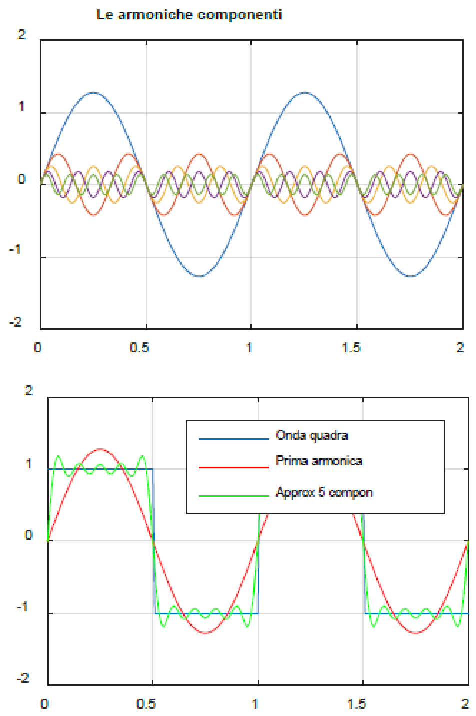
Per capire meglio l’analisi di Fourier analizziamo l’onda quadra cioè un esempio specifico che permette di capire il fatto che, sommando molti segnali armonici con diverse ampiezza, frequenza e fase iniziale si possono ottenere segnali molto diversi. questo aspetto analizziamo un’onda quadra prima a due armoniche. L’onda quadra può essere scomposta in diverse armoniche: aumentando il numero di componenti armoniche, ovvero il numero dei segnali armonici a diversa frequenza, si può migliorare l’approssimazione del segnale. In questo caso particolare dell’onda quadra per poterla ricostruire correttamente si utilizzano un numero infinito di componenti “dispari” ovvero le multiple della prima armonica. La prima armonica è un segnale armonico che ha lo stesso periodo dell’onda quadra che si vuole approssimare. Si usano quindi la prima armonica, la terza (frequenza tripla della prima, la quinta (frequenza quintupla della prima), la settima e così via. Le ampiezze delle componenti armoniche che approssimano l’onda quadra sono inversamente proporzionali alla frequenza. Si considera sempre una fase iniziale nulla. Considerando le armoniche pari invece si ha la ricostruzione del dente di sega.



ONDA QUADRA 2 armoniche



ONDA QUADRA 3 armoniche



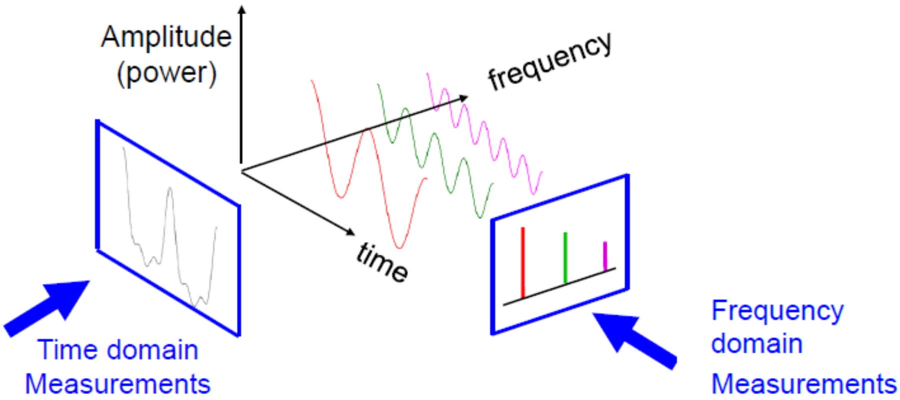
ONDA QUADRA 5 armoniche

Trasformata di Fourier

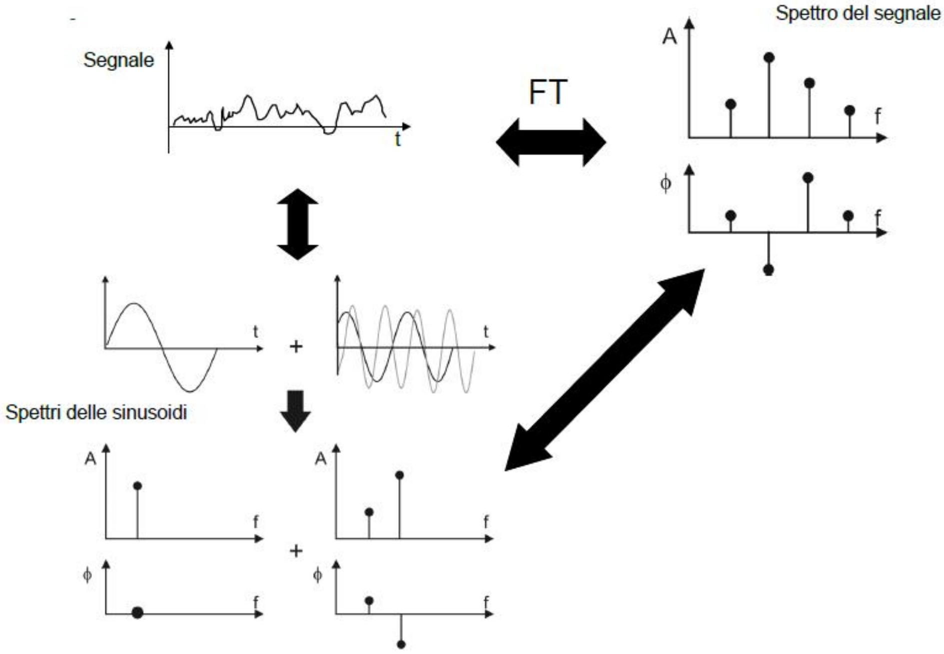
La trasformata di Fourier è quello strumento matematico che ci permette, dato un segnale di partenza, di stimare quali componenti armoniche dobbiamo utilizzare per ricostruire tale segnale. La trasformata di Fourier effettua una trasformazione dal dominio del tempo al dominio delle frequenze. Il contenuto di informazioni passa inalterato attraverso questa trasformazione che pertanto è reversibile. La trasformata di Fourier è dunque reversibile, nel senso che è possibile passare dal dominio del tempo a quello delle frequenze e viceversa, senza problemi. Non tutti i segnali sono scomponibili con la trasformata di Fourier, tuttavia con un'ottima approssimazione possiamo considerare possibile la trasformazione con Fourier dei segnali provenienti dai trasduttori. Dunque per i segnali provenienti dai trasduttori si può pensare che la trasformazione tempo-frequenza sia sempre possibile e che dunque un qualsiasi segnale sia sempre scomponibile in somma di sinusoidi

Spettro di un segnale

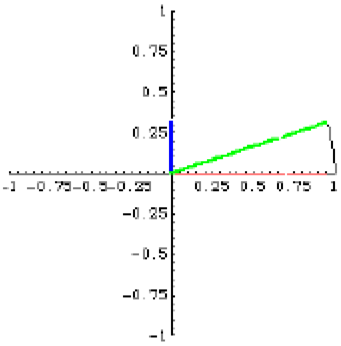
La trasformata di Fourier è di fatto un modo alternativo per rappresentare i segnali: al posto di rappresentare l'andamento del segnale nel tempo, si rappresenta il valore di ampiezza e fase di ciascuna componente armonica che si deve usare per ricostruire il segnale. Dal momento che si rappresenta l'ampiezza e la fase in funzione delle frequenze, il dominio della trasformata di Fourier sono le frequenze. Il grafico che rappresenta l'ampiezza in funzione delle frequenze prende il nome di spettro. Lo spettro di un segnale deve essere definito in modulo e fase.

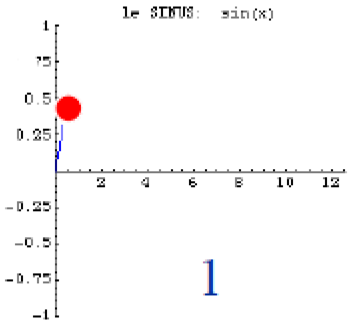


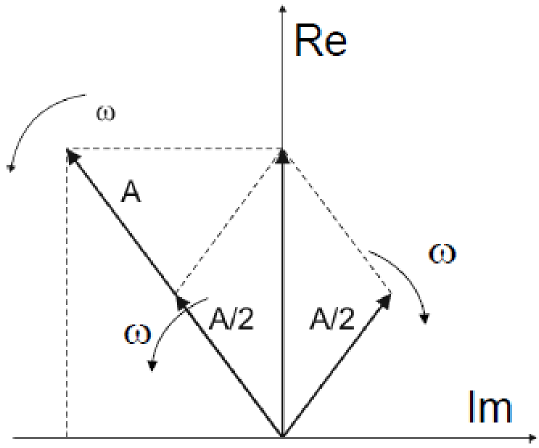
Lo spettro del segnale è dunque un grafico ottenuto come somma degli spettri delle sinusoidi: dato un segnale questo viene scomposto in N componenti armoniche, ciascuna caratterizzata da frequenza, ampiezza e fase. Si realizza allora lo spettro delle sinusoidi, per ogni componente armonica, disegnando due grafici: uno che lega l'ampiezza alla frequenza e una che lega la fase alla frequenza. Si sommano questi grafici ottenendo lo spettro del segnale (sono in realtà due grafici, uno delle ampiezze e uno delle fasi). Lo spettro del segnale complessivo è dunque l'insieme dei picchi di tutte le componenti. I segnali random contengono un numero molto elevato (in teoria infinito) di componenti armoniche.



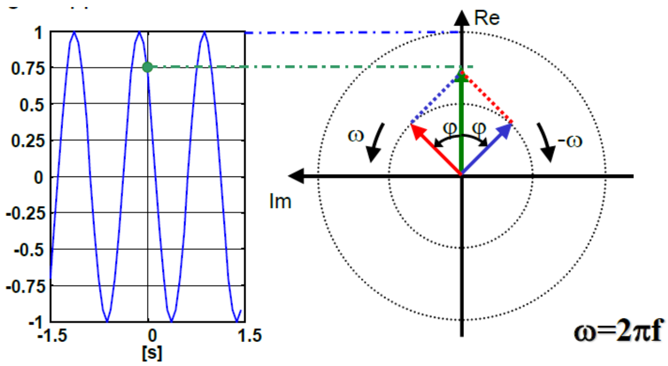
Una qualunque componente armonica può essere vista come la proiezione sull'asse reale di un vettore rotante nel piano complesso. È quindi possibile rappresentare una componente armonica come un vettore nel piano complesso. Dunque l'armonica è una proiezione sull'asse reale di un vettore rotante nel piano complesso. La singola sinusoide può allora essere vista come proiezione sull'asse reale di un vettore A che ruota a velocità angolare $\omega = 2\pi f$ nel piano complesso oppure come somma di due vettori di ampiezza $A/2$, l'uno il complesso coniugato dell'altro, e rotanti in direzioni opposte.







In maniera più rigorosa la sinusoide può essere vista come composizione di due vettori che ruotano nel piano complesso con velocità angolare uguale in modulo, ma di segno opposto.



Abbiamo detto che qualunque componete armonica può essere vista come somma di 2 vettori rotanti nel piano complesso. Ogni vettore nel piano complesso può essere rappresentato come un numero complesso, quindi come modulo e fase oppure come parte reale e parte immaginaria:

$\vartheta = \omega t + \phi$

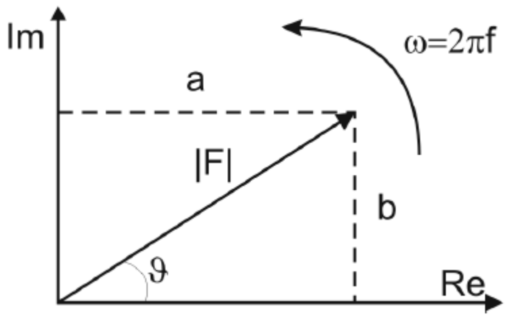
$a = |F|cos\vartheta$

$b = |F|sin\vartheta$

$cos\vartheta + jsin\vartheta = e^{j\vartheta}$

$F = |F|(cos\vartheta + jsin\vartheta) = |F|e^{j\vartheta}$

$|F| = \sqrt{a^2 + b^2}$

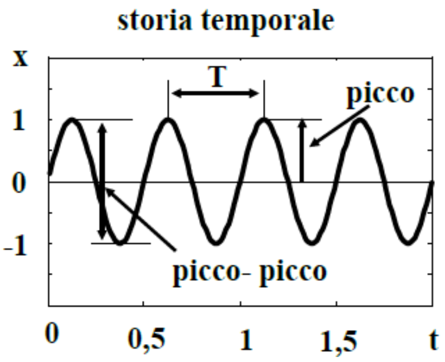


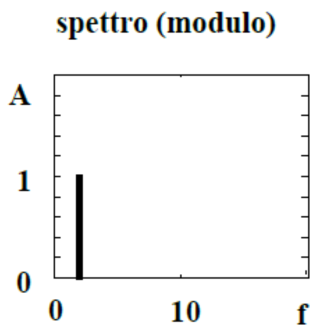
Se la fase iniziale ϕ (ovvero la fase al tempo zero) è pari a zero, si realizza un coseno. Se la fase iniziale è pari a $\pi/2$ invece si realizza un coseno. Con un valore generico di ϕ, si ottiene un segnale armonico generico di equazione:

$$X(t) = Acos(\omega t + \phi)$$

Le informazioni contenute nella rappresentazione di un segnale nel dominio del termo e nella rappresentazione nel dominio delle frequenze sono le stesse: la media può infatti essere calcolata sia a partire da una rappresentazione che a partire dall'altra:

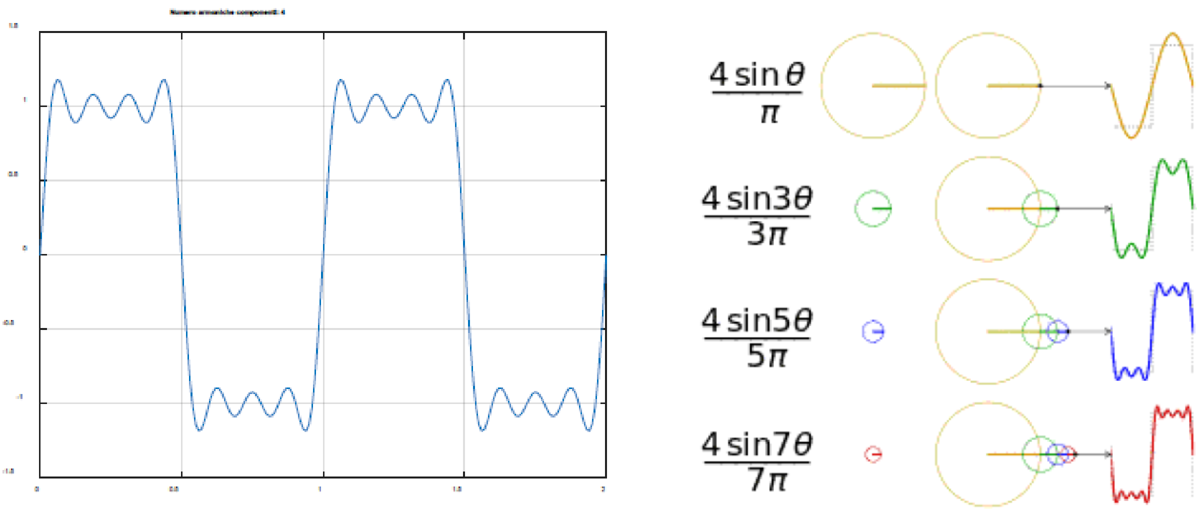
$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2\, dt(tempo)} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N}\frac{A_i^2}{2}(frequenze)} = \frac{A_1}{\sqrt{2}}$$





Esempio dell'onda quadra - ripresa

Riprendendo l'esempio precedentemente fatto dell'onda quadra è ora possibile comprendere che ogni componente armonica può essere vista come la proiezione sull'asse reale di un vettore rotante nel piano complesso.



Differenza tra spostamento, velocità e accelerazione

Se si ha un segnale nel dominio del tempo e si realizza il suo spettro, è possibile calcolare lo spettro della derivata o dell'integrale di tale segnale, direttamente nello spettro stesso, ovvero lavorando nel dominio delle frequenze. Dal momento che lo spettro lavora scomponendo il segnale in componenti armoniche, fare la derivata o l'integrale nello spettro significa fare la derivata o l'integrale di una componente armonica alla volta. Ma derivare o integrare un segnale armonico, è una operazione immediata. Dunque:

- L'operazione di derivazione comporta l'aggiunta di 90° alle fasi: derivare un segnale nello spettro significa moltiplicare ogni componente armonica per il proprio valore di omega e fare uno sfasamento di $\pi/2$. In termini di modulo, se ho un segnale nel tempo che ha tutte le ampiezze delle sue componenti armoniche uguali, la sua derivata avrà ampiezze linearmente crescenti con la frequenza. Quindi se si misura un segnale in spostamento, per ottenere la velocità in termini di modulo occorre moltiplicare ciascuna componente armonica per ω. Quindi derivando il segnale, rendo più grandi le componenti armoniche a frequenze maggiori.

- L'operazione di integrazione comporta invece la sottrazione di 90° alle fasi

Dunque se si acquisisce il moto di un oggetto misurando lo spostamento, si sarà facilitati se il moto avrà soprattutto componenti armoniche a frequenze basse. Se invece il moto ha soprattutto componenti armoniche a frequenze molto elevate, sarà in generale preferibile misurare le accelerazioni, in quanto le accelerazioni hanno valori di ampiezza molto maggiori degli spostamenti ad alta frequenza, per via della moltiplicazione per ω^2.