

Capitolo 6. Transitori

Esercizio 6.1

Dato il circuito in figura 6.1, sono noti:
 $R1 = 4 \Omega$, $R2 = 6 \Omega$,
 $V1 = 18 \text{ V}$, $V2 = 24 \text{ V}$,
 $I1 = 6 \text{ A}$, $C = 3 \mu\text{F}$.
 Determinare alla chiusura di S la tensione $v(t)$ ed il valore assunto per $t = 6 \mu\text{s}$

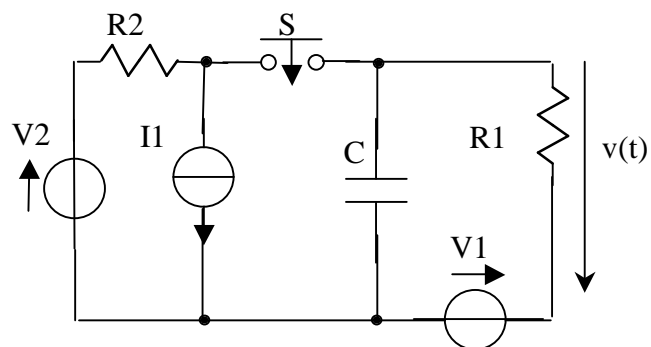


Figura 6.1

Soluzione

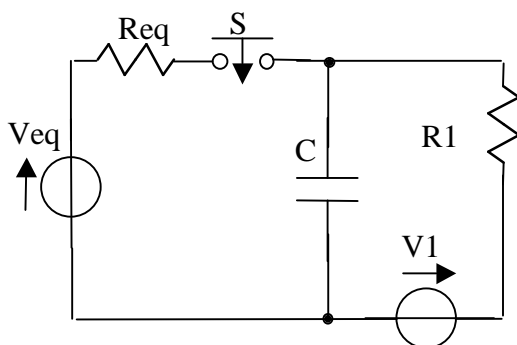


Figura 6.2

Conviene semplificare la parte di sinistra del circuito trasformandola nel bipolo equivalente serie; si ottiene allora che:

$$V_{eq} = V2 - R2 I1 = -12 \text{ V}$$

$$R_{eq} = R2 = 6 \Omega$$

All'istante $t=0^-$ il condensatore si comporta come un circuito aperto e la tensione ai suoi capi (diretta verso l'alto) è pari a $V1$, $v_{C0} = 18 \text{ V}$ e la tensione richiesta $v(0^-) = 0 \text{ V}$.
 All'istante $t = 0^+$ si sostituisce il condensatore con un generatore di tensione pari a v_{C0} e si calcola la tensione richiesta. Si può notare in tal caso che $V_{eq} - R_{eq}$ risulta in parallelo ad un generatore di tensione

($v_{C_0^-}$) e quindi agli effetti esterni equivale al solo generatore di tensione. A questo punto $v(0^+) = V1 - v(0^-) = 0V$

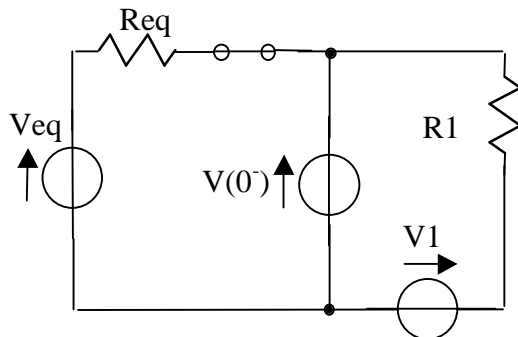


Figura 6.3

A regime il condensatore si comporta come un circuito aperto, la tensione $v(\infty)$ può essere calcolata osservando che V_{eq} e $V1$ risultano in serie e con la regola del partitore di tensione si ottiene: $v(\infty) = (V1 - V_{eq}) R1 / (R1 + Req) = 12V$. Per il calcolo della costante di tempo è

necessario calcolare la $Geqc$ vista dei morsetti del condensatore a manovra avvenuta e con la rete resa passiva; risulta quindi che $Geqc$ è pari al parallelo del resistore Req e del resistore $R1$, $Geqc = Geq + G1 = 0.417 S$, la costante di tempo $\tau = C/Geqc = 7.2 \mu s$. Segue che $v(t) = -12 e^{-t/\tau} + 12 V$. $v(6\mu s) = 6.785 V$

Esercizio 6.2

Dato il circuito in figura 6.4, sono noti:

- $R1 = 2 \Omega$,
- $R2 = 3 \Omega$, $R3 = 5 \Omega$
- $V1 = 8 V$, $V2 = 10 V$,
- $L = 1 mH$.

Determinare $i(t)$ e stabilire il suo valore per $t = 2\tau$

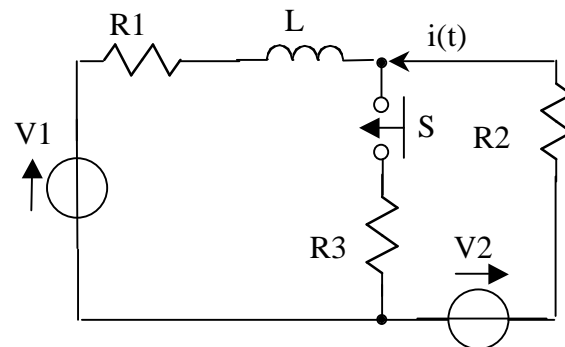


Figura 6.4

Soluzione

La rete è già abbastanza semplificata. Poiché il circuito è regime prima dell'evento, per $t=0^-$ la tensione sull'induttanza è nulla. La corrente nell'induttanza prima dell'evento (corrisponde anche alla corrente richiesta) è sostenuta dai due generatori $V1$ e $V2$ (in serie) e limitata dalla serie dei due resistori $R1$ ed $R2$.

Quindi vale $i(0^-) = (V2 - V1) / (R1 + R2) = 0.4 A$. Al fine di risolvere il circuito all'istante $t=0^+$, l'induttanza può essere sostituita da un

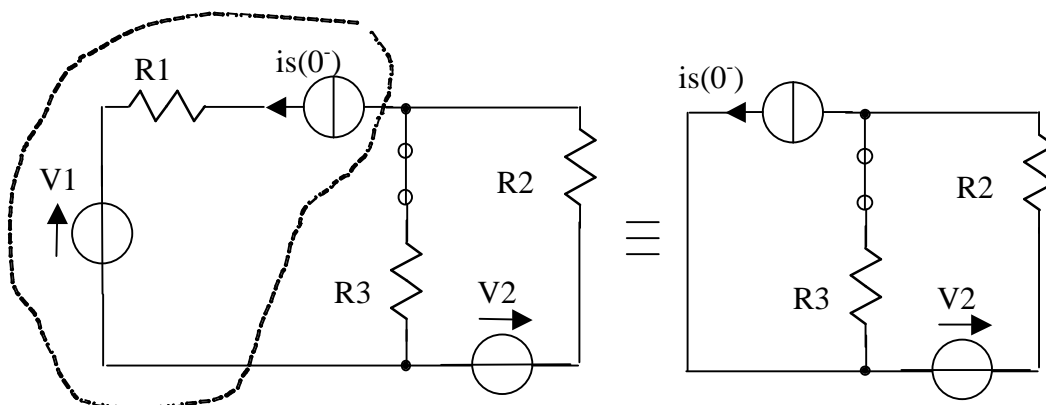


Figura 6.5

generatore di corrente $i_s(0^-) = 0.4 \text{ A}$ (verso sinistra), che risulta, agli effetti esterni, in parallelo al resistore R_3 . Trasformando in equivalente serie il parallelo i_s-R_3 si ottiene $i(0^+) = (V_2 + I_s \cdot R_3) / (R_2 + R_3) = 1.5 \text{ A}$. A regime il circuito si presenta come parallelo di tre bipoli di tipo serie. La tensione ai loro capi (verso l'alto) si trova trasformandoli in bipoli di tipo parallelo (formula di Millman):

$$V = (V_1 \cdot G_1 + V_2 \cdot G_2) / (G_1 + G_2 + G_3) = 7.097 \text{ V.}$$

Quindi $i(+\infty) = (V_2 - V) / R_2 = 0.9677 \text{ A}$. La costante di tempo τ si ottiene come L / R_{eq} , dove R_{eq} è la resistenza "vista" da L dopo aver reso passiva la rete $R_{eq} = R_1 + (R_2 // R_3) = 3.875 \Omega$; da cui $\tau = 258.1 \mu\text{s}$. Segue $i(t) = 0.5323 e^{-t/\tau} + 0.9677 \text{ A}$. $i(2\tau) = 1.0397 \text{ A}$

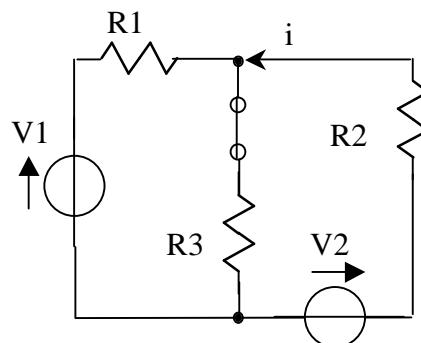


Figura 6.6

Esercizio 6.3

Dato il circuito in figura 6.7, sono noti:

$$R_1 = 2 \Omega, R_2 = 3 \Omega,$$

$$R_3 = 1 \Omega, R_4 = 5 \Omega,$$

$$R_5 = 4 \Omega,$$

$$V_1 = 10 \text{ V}, V_2 = 12 \text{ V},$$

$$V_3 = 80 \text{ V}, C = 3 \mu\text{F}.$$

L'interruttore S è chiuso da lungo tempo.
 Determinare all'apertura di S il transitorio di $v_C(t)$ e tracciarne l'andamento in modo qualitativo

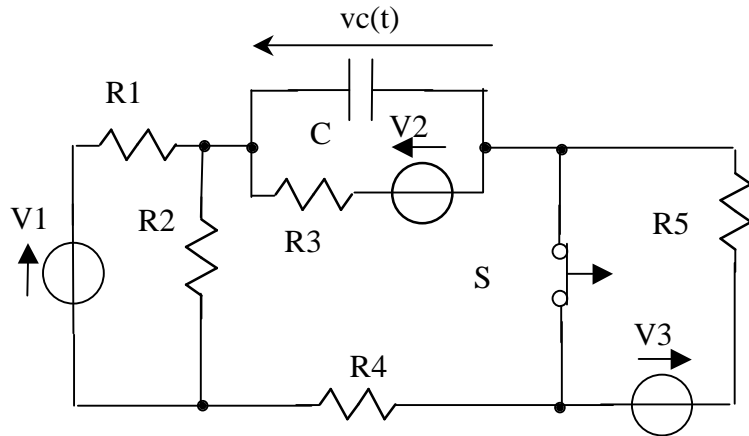
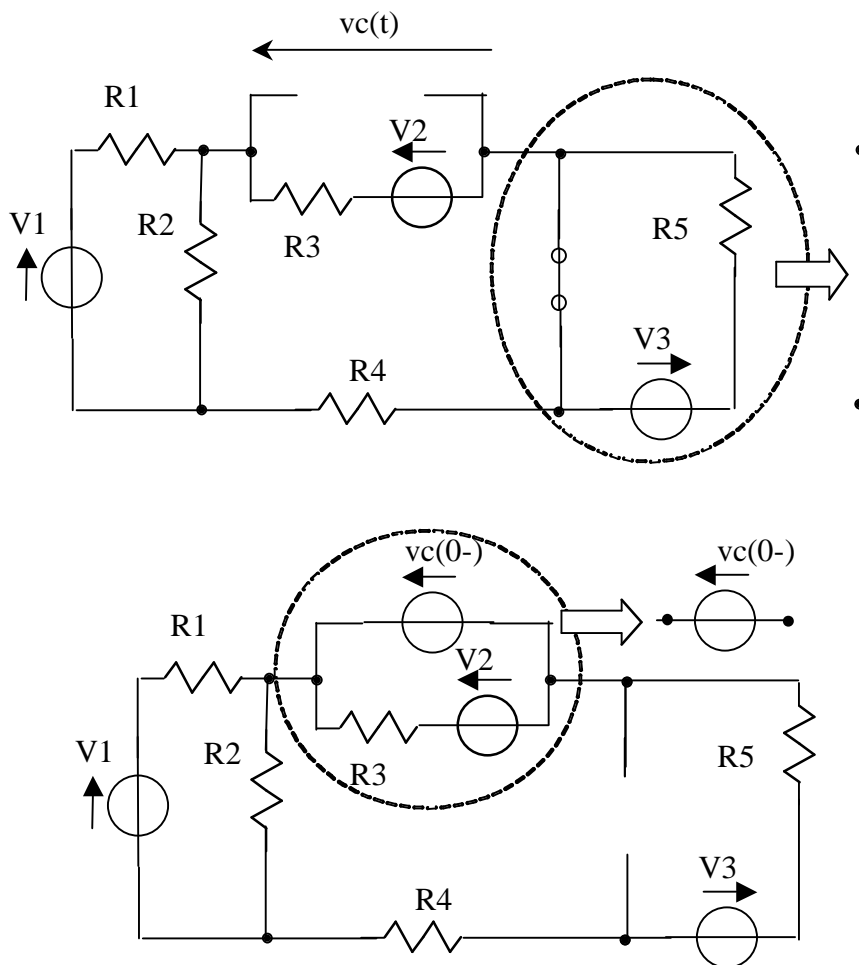


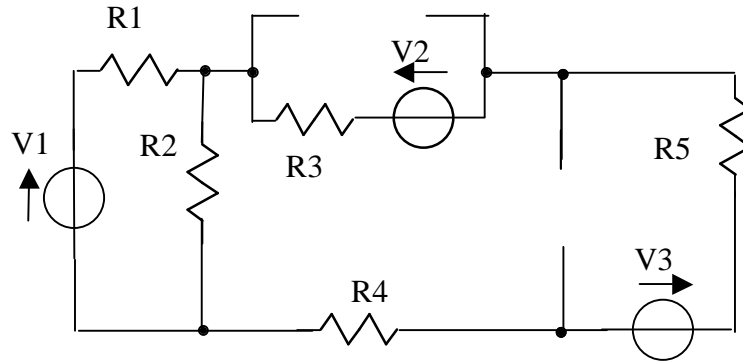
Figura 6.7

Soluzione

A $t=0^-$ rimangono tre bipoli di tipo serie in parallelo tra loro: $(V1, R1)$, $(R2)$ e $(V2, R3+R4)$.



La comune tensione vale $V=(V1 \cdot G1+V2 \cdot G34)/(G1+G2+G34)= 7 \text{ V}$,
 da cui $vc(0^-) = V2+R3 \cdot (V-V2)/(R3+R4) = 11.167 \text{ V}$. A $t=0^+$ sono
 sempre tre i bipoli in parallelo: $(V1, R1)$, $(R2)$ e $(V3+vc(0^-), R5+R4)$.

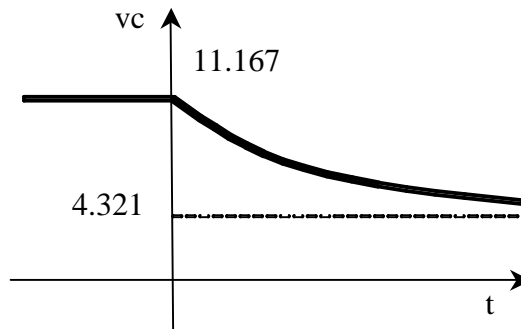


A regime nel condensatore non circola corrente; i tre bipoli in
 parallelo sono $(V1, R1)$, $(R2)$ e $(V3+V2, R3+R5+R4)$.

$V=(V1 \cdot G1+(V3+V2) \cdot G345)/(G1+G2+G345)= 15.214 \text{ V}$, da cui si
 può calcolare la tensione sul
 condensatore che è pari a :

$$vc(\infty) = (V-V3-V2) \cdot R3/(R3+R4+R5)+V2 = 4.321 \text{ V.}$$

La costante di tempo si ottiene come $\tau = C \cdot Req = 2.732 \mu\text{s}$ dove $Req = ((R1//R2)+R4+R5)//R3$.



Esercizio 6.4

Nel circuito in figura
 6.8 sono noti:

- $R1 = 8 \Omega$, $R2 = 3 \Omega$,
- $R3 = 5 \Omega$, $V1 = 20 \text{ V}$,
- $V2 = 22 \text{ V}$, $I1 = 12 \text{ A}$,
- $L = 20\text{mH}$

Determinare $v(t)$ e
 tracciarne l'andamento
 in funzione del tempo

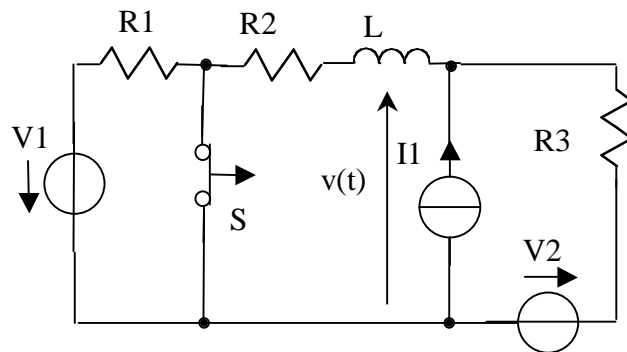
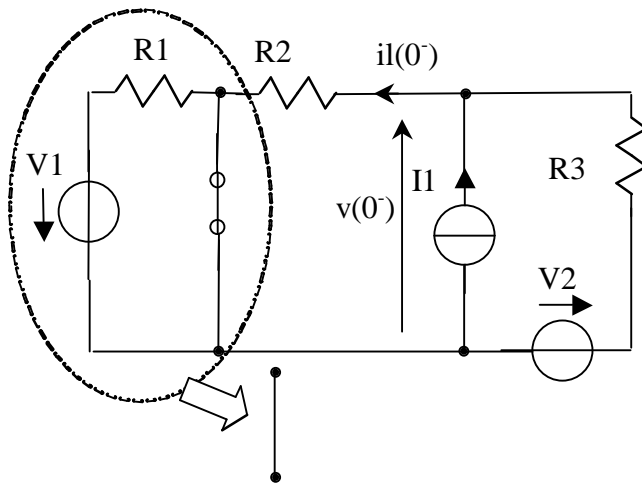


Figura 6.8

Soluzione



A $t=0^-$ rimangono tre bipoli in parallelo: $(R2)$, $(I1)$ e $(R3, V2)$. Trasformando $V2-R2$ nell'equivalente parallelo si può facilmente calcolare la corrente ; $il(0^-) = (I1 + V2/R3) \cdot G2 / (G2 + G3) = 10.25 \text{ A}$

(verso sinistra) e la tensione $v(0^-) = R2 \cdot il(0^-) = 30.75 \text{ V}$.

All'istante $t = 0^+$ rimangono tre bipoli in parallelo: un generatore di corrente pari a $il(0^-)$, $I1$ e $R3-V2$. La tensione $v(0^+)$ può essere

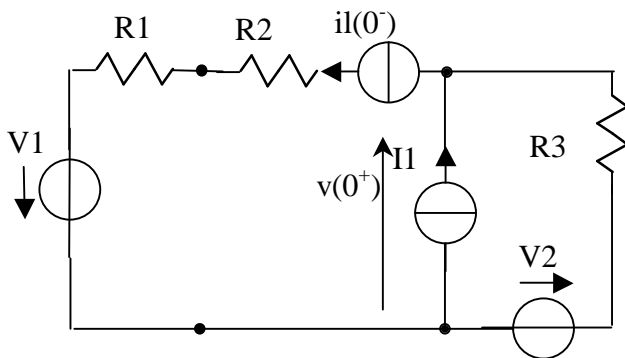


Figura 6.10

calcolata trasformando il bipolo serie $V2-R3$ nell'equivalente

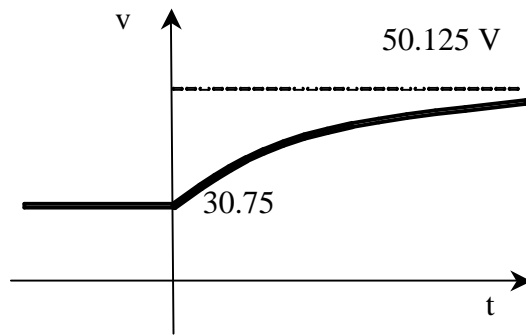
parallelo e risulta pari a $v(0^+) = (I1 + V2 \cdot G3 - il(0^-)) / (G3) = 30.75 \text{ V}$;

La $v(\infty)$ si calcola osservando che a $t=\infty$ restano tre bipoli in parallelo: $(V1-R1+R2)$, $(I1)$ e $(V2-R3)$.

Si trova allora $v(\infty) = (-G12 \cdot V1 + I1 + V2 \cdot G3) / (G12 + G3) = 50.125 \text{ V}$ dove $G12 = 1 / (R1 + R2)$;

Per il calcolo della costante di tempo si ha $Req = R1 + R2 + R3 = 16 \Omega$;

$\tau = L / Req = 1.25 \text{ ms}$



Esercizio 6.5

Sia dato il circuito rappresentato in figura 6.11, con i seguenti dati:
 $R_1 = 18 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$,
 $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 7 \Omega$,
 $V_1 = 18 \text{ V}$, $V_2 = 22 \text{ V}$,
 $L = 1 \text{ mH}$.

Determinare la tensione $v(t)$ alla chiusura dell'interruttore

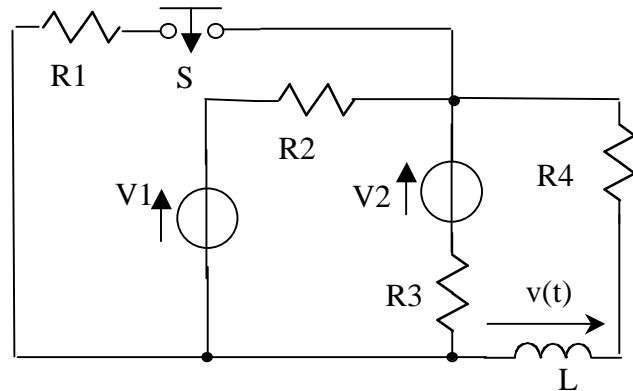


Figura 6.11

Soluzione

All'istante $t=0^-$ (interruttore aperto) rimangono tre bipoli in parallelo: (V_1-R_2) , (V_2-R_3) , (R_4) . La corrente può essere quindi facilmente calcolata come $i_l(0^-) = (G_2 \cdot V_1 + V_2 \cdot G_3) \cdot G_4 / (G_2 + G_3 + G_4)$

$= 2.31 \text{ A}$ (diretta verso il basso).

La tensione $v(0^-) = 0$ in quanto l'induttore è equivalente ad un corto circuito. A $t = 0^+$ rimangono quattro bipoli in parallelo: (R_1) , (V_1-R_2) , (V_2-R_3) , $(i_l(0^-)-R_4)$.

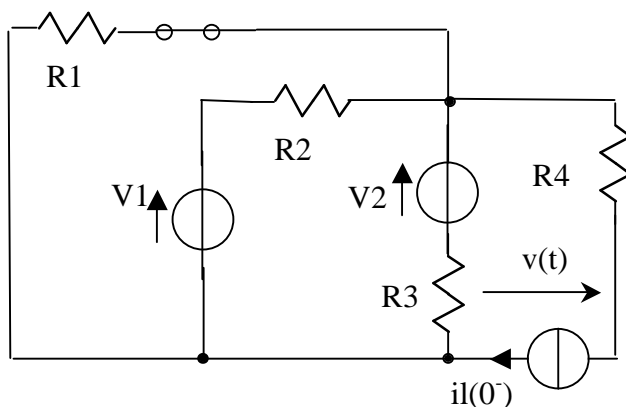


Figura 6.12

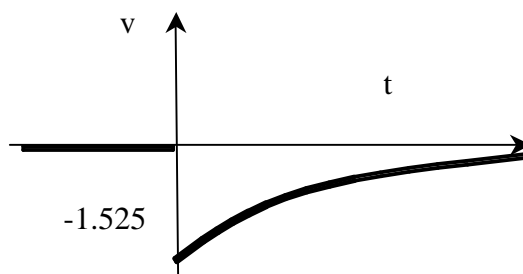
La tensione su $(i_l(0^-) \cdot R_4)$ è pari a

$V = (V_1 \cdot G_2 + V_2 \cdot G_3 - i_l(0^-)) / (G_1 + G_2 + G_3) = 14.64 \text{ V}$ (la resistenza R_4 non è presa in considerazione in quanto in serie a $i_l(0^-)$).

La tensione v è quindi pari a $v(0^+) = V - R_4 \cdot i_l(0^-) = -1.525 \text{ V}$.

A regime (∞) la tensione è nulla in quanto l'induttore si comporta di nuovo come un corto circuito.

La costante di tempo è $\tau = L / R_{eq} = 1.1497 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, dove $R_{eq} = R_4 + (1 / (G_1 + G_2 + G_3)) = 8.698 \Omega$



Esercizio 6.6

Il circuito in figura 6.13 presenta:

$R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 8 \Omega$

$V_1 = 18 \text{ V}$, $V_2 = 20 \text{ V}$,

$V_3 = 22 \text{ V}$, $I_1 = 12 \text{ A}$.

$C = 10 \mu\text{F}$

L'interruttore è chiuso da

tempo infinito. A $t = 0 \text{ s}$ si

apre l'interruttore, determinare la tensione sul condensatore nel verso indicato in figura.

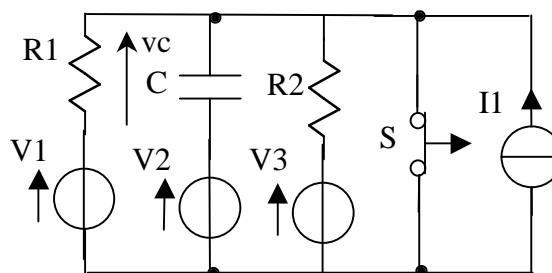


Figura 6.13

Soluzione

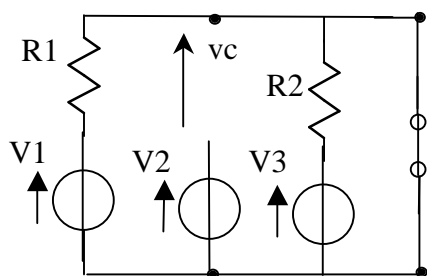


Figura 6.14

All'istante $t = 0^-$ resta V_2 in serie ad un circuito aperto e un corto circuito, $v_c(0^-) = -V_2 = -20 \text{ V}$ (diretta verso l'alto). All'istante $t = \infty$ il condensatore è un circuito aperto, la tensione ai capi di V_2 - C si trova trasformando i bipoli nel loro equivalente parallelo ed è pari a $V = (V_1 \cdot G_1 + V_3 \cdot G_2 + I_1) / (G_1 + G_2) =$

60.86 V;

la tensione $v_C(\infty)$ vale quindi: $V-V_2=40.86$ V. La costante di tempo $\tau = C/Geq$, $Geq = G1+G2 = 0.292$ S, $\tau = 34.29 \mu s$, da cui $v_C(t) = (v_C(0^+) - v_C(\infty)) \cdot e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = -60.86 \cdot e^{-t/\tau} + 40.86$ V

Esercizio 6.7

Dato il circuito in figura 6.15, sono noti:

$$v(t) = 150 \cdot \sin(500 \cdot t)$$

$$R = 50 \Omega, L = 0.2 \text{ H}$$

Determinare $i(t)$, alla chiusura dell'interruttore al tempo $t=0$.

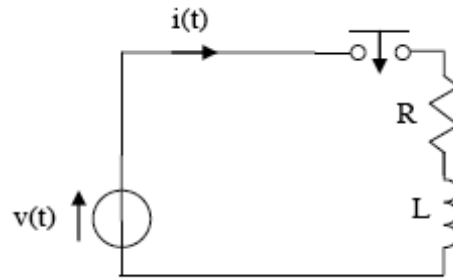


Figura 6.15

Soluzione

Il transitorio è retto dalla seguente equazione differenziale:
 $v = Ri + L \frac{di}{dt}$, la

soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare $i_p(t)$ e della soluzione dell'omogenea associata $i_o(t)$, $i(t) = i_p(t) + i_o(t)$. L'integrale particolare $i_p(t)$ è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi dell'algebra dei fasori, in particolare $I_p = V / (R + j\omega L) = -0.849 - j0.424$ A e quindi $i_p(t) = \sqrt{2} \cdot |I| \cdot \cos(\omega t + \text{atan}(\text{Im}(I)/\text{Re}(I)) + \pi)$.

L'integrale dell'omogenea associata $i_o(t)$ è noto è pari all'esponenziale:

$$i_o(t) = A e^{(-R/L) \cdot t}$$

La costante A si calcola imponendo la condizione iniziale $i(t) = i_o(t) + i_p(t) = 0$ e si trova $A = 1.2$ A

Esercizio 6.8

Dato il circuito in figura 6.16, sono noti:

$$v(t) = 250 \cdot \sin(500 \cdot t + \pi/4)$$

$$R = 100 \Omega, C = 250 \text{ mF}$$

$$V_o = 200 \text{ V}$$

Determinare $i(t)$, derivante dalla chiusura dell'interruttore al tempo $t=0$.

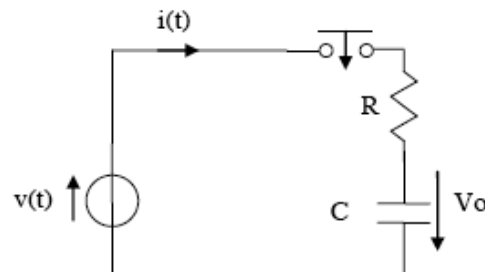


Figura 6.16

Soluzione

Il circuito è retto dall'equazione differenziale: $v = RC \cdot pvc + vc$ e tutte le grandezze di rete non di stato, evolveranno con la stessa costante di tempo. La soluzione è quindi data dalla somma dell'integrale particolare $ip(t)$ e della soluzione dell'omogenea associata $io(t)$, $i(t) = ip(t) + io(t)$. L'integrale particolare $ip(t)$ è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi dell'algebra dei fasori $I_p = V / (R - j/\omega C) = 1.25 - j1.25$ A e quindi $ip(t) = 2.5 \cdot \cos(\omega t - 0.78)$. L'integrale dell'omogenea associata $io(t)$ è il seguente: $io(t) = A \cdot e^{(-1/RC)t}$.

La tensione sul condensatore a $t = 0^- = 0^+$ è nulla $V_0 = 0$, di conseguenza la costante A si calcola imponendo la condizione iniziale della corrente calcolata all'istante iniziale che è data da $I_0 = (v(0) + 0) / R = 3.77$ A da cui $i(0) = io(0) + ip(0) = 3.77$ da cui si trova $A = 1.99$ A

Esercizio 6.9

Dato il circuito trifase in figura 4, sono noti:

$$v(t) = 200 \cdot \cos(300 \cdot t + \pi/4)$$

$$R1 = 500 \Omega, R2 = 100 \Omega, L = 0.2 \text{ H}$$

Determinare $i_r(t)$, derivante dalla chiusura dell'interruttore al tempo $t=0$

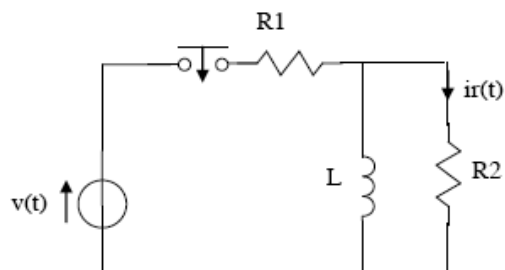


Figura 6.17

Soluzione

Il transitorio è retto dalla seguente equazione differenziale: $v = R1 \cdot iL + (((R1 + R2) / R2)) L \cdot p iL$, dove iL è la corrente sull'induttanza L , le altre grandezze di rete non di stato evolveranno con la stessa costante di tempo. La soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare $ip(t)$ e della soluzione dell'omogenea associata $io(t)$, $i(t) = ip(t) + io(t)$. L'integrale

particolare $i_p(t)$ è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi dell'algebra dei fasori. In particolare la rete risulta formata dal parallelo tra L , R_2 e la serie del generatore $v(t)$ e R_1 . La tensione ai capi di R_2 è quindi pari a $V_{r2} = (V/R_1) / (1/R_1 + 1/(\omega L) + 1/R_2) = 6.98 + j6.98$ V.

La corrente è pari a $I_{r2} = V_o/R_2 = -0.022 + j0.136$ A.

Quindi $i_p(t) = 0.195 \cdot \cos(\omega t + 1.732)$. L'integrale dell'omogenea associata $i_o(t)$ e' il seguente: $i_o(t) = A e^{(-1/\tau)t}$, dove la costante di tempo τ è data dal rapporto tra l'induttanza L e il parallelo di R_1 e R_2 , $\tau = 2.4$ ms. La costante A si trova imponendo la condizione iniziale sulla corrente $i_r(t)$. In particolare la corrente nell'induttanza L è nulla per $t = 0^- = 0^+ = 0$, di conseguenza $i_r(0) = v(0)/(R_1 + R_2) = 0.236$ A. La costante A risulta quindi pari a 0.267 A.

Esercizio 6.10

Dato il circuito in figura, sono noti:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \sin(300 \cdot t + \pi/6)$$

$$R = 10 \Omega, L = 0.1 \text{ H}$$

Si considerino i seguenti tre casi:

$$\text{Caso1: } C = 10 \text{ mF}$$

$$\text{Caso2: } C = 4 \text{ mF}$$

$$\text{Caso3: } C = 5 \text{ mF}$$

Determinare $i(t)$, derivante dalla chiusura dell'interruttore al tempo $t=0$

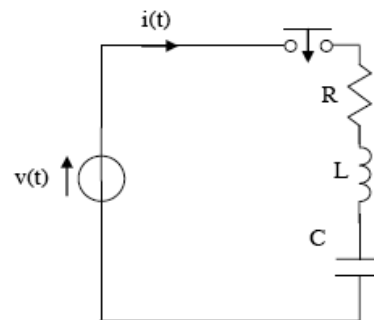


Figura 6.18

Soluzione

Il transitorio è retto dalle seguenti due equazioni differenziali:

$$v = Ri + Lpi + v_c,$$

$$i = Cpv_c \quad \text{dove } v_c \text{ è la tensione ai capi del condensatore.}$$

Risolvendo l'equazione caratteristica si trovano, nel primo caso, i seguenti due autovalori: $\lambda_1 = -50 + j998.75$, $\lambda_2 = -50 - j998.75$. La soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare $i_p(t)$ e dalla soluzione dell'omogenea associata $i_o(t)$, $i(t) = i_p(t) + i_o(t)$. L'integrale particolare $i_p(t)$ è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi

dell'algebra dei fasori, in particolare $I_p = V / (R + j\omega L - j/(\omega C)) = -0.291 + j0.155$ A e quindi:

$$i_p(t) = \sqrt{2} \cdot |I_p| \cdot \cos(\omega t + \text{atan}(\text{Im}(I)/\text{Re}(I))).$$

Dall'analisi matematica si ottiene che l'integrale dell'omogenea associata $i_o(t)$ e' il seguente:

$$i_o(t) = e^{(\text{Re}(\lambda_1)) \cdot t} (A_1 \cdot \cos(\text{Im}(\lambda_1 \cdot t)) + A_2 \cdot \sin(\text{Im}(\lambda_1 \cdot t))).$$

Per il calcolo delle costanti A_1 e A_2 bisogna imporre le condizioni iniziali sulla corrente e sulla sua derivata prima. La corrente nell'istante immediatamente precedente la chiusura dell'interruttore è nulla e resta nulla anche nell'istante immediatamente successivo, la derivata prima della corrente $p i = v/L$ dove vL è la tensione ai capi dell'induttanza L . Nell'istante $t=0$ risulta $p i(0) = v(0)/L = 707.107$ A. Risulta quindi $A_1 = -0.411$ A e $A_2 = -0.795$ A.

Risolvendo l'equazione caratteristica si trovano, nel secondo caso, i seguenti due autovalori: $\lambda_1 = \lambda_2 = -50$. La soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare $i_p(t)$ e della soluzione dell'omogenea associata $i_o(t)$, $i(t) = i_p(t) + i_o(t)$. L'integrale particolare $i_p(t)$ è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi dell'algebra dei fasori, in particolare

$$I_p = V / (R + j\omega L - j/(\omega C)) = -2.131 - j2.445$$
 A e quindi

$$i_p(t) = \sqrt{2} \cdot |I_p| \cdot \cos(\omega t + \text{atan}(\text{Im}(I_p)/\text{Re}(I_p)) + \pi).$$

L'integrale dell'omogenea associata $i_o(t)$ e' il seguente:

$$i_o(t) = e^{(\lambda_1) \cdot t} (A_1 + A_2 \cdot t).$$

Per il calcolo delle costanti A_1 e A_2 bisogna imporre le condizioni iniziali sulla corrente e sulla sua derivata prima. La corrente nell'istante immediatamente precedente la chiusura dell'interruttore è nulla e resta nulla anche nell'istante immediatamente successivo, la derivata prima della corrente $p i = v/L$ dove vL è la tensione ai capi dell'induttanza L . Nell'istante $t=0$ risulta $p i(0) = v(0)/L = 707.107$ A. Risulta quindi $A_1 = 3.014$ A e $A_2 = -179.49$ A.

Risolvendo l'equazione caratteristica si trovano, nel terzo caso, i seguenti due autovalori: $\lambda_1 = -72.36$ $\lambda_2 = -27.64$. La soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare $i_p(t)$ e della soluzione

dell'omogenea associata $i_o(t)$, $i(t)=i_p(t)+i_o(t)$. L'integrale particolare $i_p(t)$ è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi dell'algebra dei fasori, in particolare:

$$I_p = V / (R + j\omega L - j / (\omega C)) = -2.124 - j2.429 \text{ A e quindi}$$

$$i_p(t) = \sqrt{2} \cdot |I_p| \cdot \cos(\omega t + \text{atan}(\text{Im}(I)/\text{Re}(I)) + \pi).$$

L'integrale dell'omogenea associata $i_o(t)$ è il seguente:

$$i_o(t) = A_1 \cdot e^{(\lambda_1)t} + A_2 \cdot e^{(\lambda_2)t}.$$

Per il calcolo delle costanti A_1 e A_2 bisogna imporre le condizioni iniziali sulla corrente e sulla sua derivata prima. La corrente nell'istante immediatamente precedente la chiusura dell'interruttore è nulla e resta nulla anche nell'istante immediatamente successivo, la derivata prima della corrente $p i = v/L$ dove vL è la tensione ai capi dell'induttanza L . Nell'istante $t=0$ risulta $p i(0) = v(0)/L = 707.107 \text{ A}$. Risulta quindi $A_1 = 5.373 \text{ A}$ e $A_2 = -2.369 \text{ A}$.

