# MAGNETOSTATICA

## Campo magnetico

Definiamo campo magnetico un campo vettoriale solenoidale generato nello spazio dal moto di una carica elettrica o da un campo elettrico variabile nel tempo. Insieme al campo elettrico esso costituisce il campo elettromagnetico, responsabile dell'interazione elettromagnetica.
A partire dall'analisi di alcuni esperimenti sulle caratteristiche del campo magnetico prodotto da correnti in conduttori filiformi indusse Laplace a formulare una legge, nota come prima legge fondamentale di Laplace, che esprime il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo ds di filo, percorso dalla corrente i, in un punto P distante r dall'elemento di filo:

$$dB = ki\frac{ds \ x \ u_r}{r^2}$$

$$k = 10^{-7}\frac{Tm}{A} = 10^{-7}\frac{H}{m}$$

Assumendo di operare nel vuoto k vale:

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}\frac{H}{m}$$

$\mu_0$ è una costante chiamata permeabilità magnetica del vuoto. Continuando a operare nel vuoto, dalla prima legge di Laplace è possibile ricavare la formulazione del campo magnetico totale:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}i\frac{ds \ x \ u_r}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint\frac{ds \ x \ u_r}{r^2}$$

Se invece si desiderasse calcolare il campo magnetico di una carica in modo è necessario ricordare la formula che lega la densità di corrente alla corrente e riformulare poi la legge del campo magnetico totale:

$$j = \frac{i}{\Sigma} = qN\vec{v}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \ x \ u_\tau}{r^2}nd\tau$$

$$d\tau = \Sigma \mathrm{ds}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \ x \ u_r}{r^2}$$

Così come per il campo elettrico anche per il campo magnetico esiste una rappresentazione, nota come linee di forza, che permette di visualizzare il campo. Le linee di forza del campo magnetico hanno due proprietà in comune con le linee di forza del campo elettrico:

1. si addensano dove l'intensità del campo è maggiore
2. non si incrociano mai

Inoltre esse sono sempre chiuse, cioè non hanno né inizio né fine (questa proprietà si esprime dicendo che il campo magnetico è solenoidale).

**Esempi di calcolo di campo magnetici**

1. Filo rettilineo (Formula Boit-Savart):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{filo} \frac{\left|\vec{dl}\ x\ \vec{r}\right|}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dl\ r\ \cos\vartheta}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dl \cos\vartheta}{r^2}$$

$\tan\vartheta - \frac{d}{z}$ $\qquad dl = dz \qquad z = -d\cot\vartheta \qquad dz = \frac{d}{(\sin\vartheta)^2} d\vartheta$

$d = r\sin\vartheta \qquad r = \frac{d}{\sin\vartheta} \qquad r^2 = \frac{d^2}{(\sin\vartheta)^2} \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{\sin\vartheta^2}{d^2}$

$$\overrightarrow{B(P)} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d}{(\sin\vartheta)^2} \sin\vartheta \frac{(\sin\vartheta)^2}{d^2} d\vartheta = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} [-\cos\vartheta]_0^\pi = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} 2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$

2. Spira circolare:

$$dB_1 \cos\vartheta = dB_{tot}$$

$$\left|\vec{dl}\ x\ \vec{r}\right| = dl_r$$

$r = \sqrt{R^2 + z^2} \qquad r^2 = R^2 + z^2 \qquad \cos\vartheta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$

$$dB\cos\vartheta = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\left|\vec{dl}\ x\ \vec{r}\right|}{r^3} \cos\vartheta = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl\cos\vartheta}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overrightarrow{B(P)} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \int dl = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{m} = iR^2\pi$$

3. Solenoide:

$$N = n°\ spire\ per\ unità\ di\ lunghezza$$

$$Ndz = n°\ spire\ in\ una\ fettina\ si\ solenoide$$

$\tan\vartheta = \frac{R}{z} \qquad z = R\cot\vartheta \qquad dz = -\frac{R}{(\sin\vartheta)^2} d\vartheta \qquad \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = (\sin\vartheta)$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} Ndz = \frac{\mu_0 N i}{2} \left[-\frac{R}{(\sin\vartheta)^2} d\vartheta\right] \left(\frac{1}{R}(sin\vartheta)^3\right) = \frac{\mu_0 N i}{2} (-\sin\vartheta) d\vartheta$$

$\cos\vartheta_1 = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad \cos\vartheta_2 = \frac{L-z}{\sqrt{R^2+z^2}}$

$$\overrightarrow{B(P)} = \frac{\mu_0 N i}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (-\sin\vartheta) d\vartheta = \frac{\mu_0 N i}{2} [\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2]$$

$$\overrightarrow{B(centro)} = \frac{\mu_0 Ni}{2}(2\cos\vartheta_1) = \mu_0 Ni\cos\vartheta_1 = \mu_0 Ni\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}}$$

$$\overrightarrow{B(\infty)} = \mu_0 Ni$$

**Proprietà campo magnetico**

Il campo magnetico gode di alcune proprietà come:

- Non è mai conservativo perché è sempre possibile concatenare qualche linea di circuito, cioè vuol dire che è sempre possibile scegliere una linea chiusa che, se ridotta, incontra o contiene il circuito
- Vale sempre la legge di Gauss, sia in condizioni stazionari che dinamiche, che afferma che il flusso del campo magnetico B attraverso una superficie chiusa è sempre nullo:

$$\oint B\, u_n d\Sigma = 0$$

$$\nabla B = 0$$

- Vale la legge di Ampere che definisce la circuitazione del campo magnetico che afferma, in forma integrale, che l'integrale di linea del campo magnetico lungo una linea chiusa, ovvero la circuitazione di B, è uguale alla somma delle correnti concatenate moltiplicata per la permeabilità magnetica del vuoto:

$$\oint \vec{B}\,\overrightarrow{dl} \neq 0 = \mu_0 i$$

La circuitazione dipende dunque dalla corrente i, cioè la corrente totale concatenata al circuito; se la somma delle correnti concatenate è nulla anche la circuitazione lo sarà:

$$\oint B\, dl = \mu_0(i_1 + i_2)$$

$$\oint B\, dl = \mu_0(i_1 - i_2)$$

Se $i_1 = i_2$: $\oint B\, dl = \mu_0(i_1 - i_2) = 0$

$$i = \int_{s} jnds = \int_{\Sigma} jnds$$

$$\oint B\ dl = \oint \nabla\ x\ B\ n\ ds = \mu_0 \int_{\Sigma} jnds$$

$$\nabla\ x\ B = \mu_0 j$$

**Esempi di calcolo di campo magnetici tramite la legge di Ampere:**

1. <u>Filo rettilineo:</u>

$$\int Bdl = B \oint dl = \mu_0 i$$

$$B 2\pi d = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$

2. <u>Cilindro pieno:</u>
   - r > R

$$\int Bdl = B \oint dl = \mu_0 i$$

$$B 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

   - r < R

$$\int Bdl = B \oint dl = \mu_0 i$$

$$B 2\pi r = \mu_0 i'$$

$$i' = j\pi r^2$$

$$j = \frac{i}{\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 j\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 jr}{2} = \frac{\mu_0 ir}{2\pi R^2}$$

3. <u>Solenoide</u>:
   - Prendiamo un rettangolo che sia completamente interno al solenoide:

$$\int_1 B\,dl = Bl = \mu_0 Nil$$

$$\int_2 B\,dl = 0$$

$$\int_3 B\,dl\,(-1) = Bl(-1) = -Bl$$

$$\int_4 B\,dl = 0$$

$$\int_{circuito} B\,dl = \int_1 B\,dl + \int_2 B\,dl + \int_3 B\,dl + \int_4 B\,dl = \mu_0 Nil - Bl = \mu_0 i$$

$$\mu_0 i = 0$$

$$\mu_0 Nil - B = 0$$

$$B = \mu_0 Ni$$

   - Prendiamo un rettangolo che sia metà interno e metà esterno al solenoide stesso:

$$\int_1 B\,dl = \mu_0 Nil$$

$$\int_2 B\,dl = 0$$

$$\int_3 B\,dl = Bl = Bl$$

$$\int_4 B\,dl = 0$$

$$\int_{circuito} B\,dl = \int_1 B\,dl + \int_2 B\,dl + \int_3 B\,dl + \int_4 B\,dl = \mu_0 Nil + Bl = \mu_0 i$$

$$\mu_0 i = Nl\mu_0 i$$

$$\mu_0 Nil + Bl = \mu_0 i$$

$$B = 0$$

**Forma locale della legge di Ampere**

Supponiamo di avere una regione di spazio, all'interno della quale è presenta una carica che diminuisce nel tempo. Per la conservatività della carica, dato che sta diminuendo, dobbiamo immaginare che questa sta uscendo dal volume e quindi c'è una carica che attraversa la superficie. Questa carica in moto produce una corrente che se analizzata permette di giungere a una formula che descrive la conservazione in termini dinamici:

$$\frac{dq}{dt} < 0$$

$$q = \int_{circ} \rho \, dv$$

$$I_\Sigma = -\frac{dq}{dt} = \oint_\Sigma j \, n \, ds = -\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dv = \int \left[-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dv$$

$$\int_V \nabla j \, dv = \oint_\Sigma j \, n \, ds = \int \left[-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dv$$

$$\nabla j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla[\nabla \, x \, B] = \mu_0 \nabla j$$

$$\nabla[\nabla \, x \, B] = 0$$

$$\mu_0 \nabla j \neq 0$$

$$\nabla \, x \, B = \mu_0 \left[j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right]$$

**Forza magnetica (carica in moto)**

Chiamiamo forza di Lorentz, o forza magnetica, quella forza subita da una carica che si muove in un campo magnetico e/o un campo elettrico. Il contributo del campo elettrico è direttamente proporzionale al valore della carica dell'oggetto ed ha la stessa direzione del campo, mentre il contributo del campo magnetico è proporzionale al valore della velocità dell'oggetto ed è perpendicolare alla direzione del moto. Pertanto, il campo magnetico non compie lavoro, ha effetto solamente sulla direzione del moto ed il suo contributo non si manifesta se l'oggetto è fermo:

$$\vec{F} = q\vec{v} \, x \, \vec{B}$$

$$dL = \vec{F}\overrightarrow{ds} = q(\vec{v} \, x \, \vec{B})\vec{v}dt = 0$$

Una qualsiasi particella immersa nel campo magnetico ha energia cinetica pari ha:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

**Forza magnetica (conduttore percorso da corrente)**

Come abbiamo già ripetuto la corrente elettrica che percorre un conduttore è dovuta al moto degli elettroni sotto l'azione del campo elettrico applicato tramite generatore; se n è il numero di elettroni liberi per unità di volume, ciascuno con carica -e e velocità $v_d$, la densità di corrente è j = -ne$v_d$. Quando tale conduttore è immerso in un campo magnetico a ciascun elettrone è applicata la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = -e\overrightarrow{v_d} \, x \, \vec{B}$$

Attraverso gli urti che gli elettroni in modo hanno con gli ioni del reticolo cristallino tale forza è trasmessa alla massa del filo conduttore, che ora e in seguito supporremo indeformabile. In un tratto lungo ds e sezione Σ sono contenuti n Σ ds elettroni e la forza risultante è:

$$dF = n\Sigma \mathrm{ds}\left(-e\overrightarrow{v_d}\ x\ \vec{B}\right) = -(\Sigma ds)nev_d x\ B = \Sigma dsj\ x\ B = ids\ x\ B$$

Questa legge prende il nome di seconda legge elementare di Laplace ed esprime il fatto che la forza magnetica su un tratto infinitesimo di filo percorso da corrente è ortogonale al filo e al campo magnetico ed è orientata rispetto a ds e B secondo la regola della vite. Capiamo dunque che le caratteristiche della forza non dipendono dal segno dei portatori di carica:

$$F = i\int_P^Q ds\ x\ B$$

Se si studia un caso particolare è possibile affermare che la forza su un filo percorso da corrente che giace in un piano in cui agisce un campo magnetico uniforme B non dipende dalla forma del filo, ma solo dalla lunghezza del segmento che unisce i suoi estremi. Se il filo che sta su un piano forma un circuito chiuso si ha, se il campo magnetico è uniforme, forza nulla.

## Momento magnetico

Da un punto di vista meccanico la forza magnetica deve considerarsi come la risultante di un sistema di forze applicate in punti diversi; essa provoca uno spostamento in accordo con il teorema del moto del centro idi massa. In generale, oltre ad avere la risultante, il sistema di forze magnetiche presenta un momento risultante diverso da 0 per cui è possibile avere anche delle rotazioni.
Se prendiamo inconsiderazione esclusivamente circuiti piani rigidi percorsi da corrente e immersi in un campo magnetico uniforme possiamo fare ulteriori analisi affermando che la forza risultante è sicuramente nulla e il circuito non si sposta, nonostante ciò il momento risultano può essere diverso da 0 e quindi mettere in rotazione il circuito.
Consideriamo ora una spira rettangolare, di lati a e b, percorsa dalla corrente i e orientiamo il verso $u_n$ della normale al piano della spira in accordo con la regola della vite rispetto al verso di percorrenza della corrente elettrica nel circuito. La spira è immersa in un campo magnetico B uniforme, che forma l'angolo $\vartheta$ con la normale. Le forze sui lati orizzontali sono eguali e contrarie dunque ciascuna di esse è la risultante di un sistema di forze parallele applicata nel centro del lato e nel loro insieme formeranno una coppia di braccio nullo e quindi di momento nullo. Le forze invece sui lati verticali, ciascuna di modulo iaB in quanto B è ortogonale ai lati a, sono anch'esse uguali e contrarie, ma costituiscono una coppia di braccio $b\sin\vartheta$. Il momento meccanico che risulta essere parallelo al piano della spira vale:

$$M = b\sin\vartheta\ F = iabB\sin\vartheta = i\Sigma B\sin\vartheta$$

Se definiamo il momento magnetico della spira possiamo riscrivere il momento meccanico:

$$m = i\Sigma u_n$$

$$M = m\ x\ B = i\Sigma u_n\ x\ B$$

Quest'ultima formula, che abbiamo dedotto per una spira rettangolare, in realtà è valida per un circuito piano di forma qualunque immerso in un campo magnetico uniforme. Il momento meccanico risulta nullo soltanto se m è parallelo a B: la posizione $\vartheta = 0$ è di equilibrio stabile, quella con $\vartheta = \pi$ è di equilibrio instabile. Per qualsiasi altro valore di $\vartheta$ M tende a far ruotare la spira in modo che il momento magnetico m diventi parallelo e concorde a B. Sospendendo opportunamente la spira è possibile generare un moto oscillatorio. Il comportamento oscillatorio della spira percorsa da corrente e immersa in un campo magnetico ricalca esattamente quello di un dipolo elettrico posto in un campo elettrostatico. In analogia con quanto visto per il dipolo elettrico dunque anche per il dipolo magnetico, o spira o ago magnetico, si definisce energia potenziale, legata alla posizione angolare rispetto alla direzione di B:

$$U_p = -mB = -mB\cos\vartheta = -i\Sigma B\cos\vartheta$$

Tra momento meccanico ed energia potenziale sussiste la seguente relazione:

$$M = -\frac{dU_p}{d\vartheta} = -mB\sin\vartheta$$

### Effetto Hall

Dunque abbiamo compreso che se poniamo un conduttore percorso da corrente all'interno di un campo magnetico, questo sarà sottoposto alla forza di Lorentz; la struttura della formula della forza di Lorentz mostra che sulla carica dell'elettrone agisce una forza F non elettrostatica e pertanto possiamo definire il campo elettromotore:

$$E_H = \frac{F}{e} = \overrightarrow{v_d}\ x\ \vec{B} = \frac{j}{ne}\ x\ B$$

Questo aspetto della forza magnetica è molto importante perché permette di introdurre un campo elettrostatico di origine magnetica cioè appunto il campo elettromotore che avrà equazione:

$$E = v\ x\ B$$

Questo campo elettromotore, noto anche come campo di Hall, provoca una deflessione nel moto delle cariche, aggiungendo una componente perpendicolare alla velocità di deriva, e di conseguenza tende ad accumulare cariche di segno opposto sulle facce ortogonali a questo stesso campo. Si creerà così una variazione di potenziale dovuta alla diversa distribuzione di cariche all'interno del conduttore. La presenza di questa variazione di potenziale all'interno di un conduttore percorso da corrente e soggetto a un campo magnetico prende il nome di effetto Hall. La differenza di potenziale può essere calcolata come l'integrale di linea del campo Hall:

$$\Delta V = \int E = vBa$$

$$v = \frac{j}{qN} = \frac{i}{qNab}$$

$$\Delta V = \frac{i}{qNab}Ba = \frac{i}{Nqb}B$$

Sfruttando l'effetto Hall è possibile misurare l'intensità del campo magnetico; dispositivi che utilizzano questo principio prendono il nome di sonde di hall. Inoltre tale effetto è stato estremamente importante per dimostrare che i portatori di carica sono gli elettroni.

### Moto di una particella carica in un campo magnetico

Una particella carica può trovarsi all'interno di un campo magnetico uniforme con:

- La velocità iniziale della particella è ortogonale al campo magnetico B in cui questa è immersa: la forza, anch'essa ortogonale a B, produce una variazione della direzione della velocità ancora ortogonale a B e quindi la velocità in qualsiasi istante successivo sta nel piano ortogonale a B individuato dalla velocità iniziale. Il moto della particella si svolge dunque in tale piano e la legge del moto è, ponendo $\sin \vartheta = 1$:

$$F = qvB = ma_n = m\frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$

Dove r è il raggio di curvatura. Essendo questo raggio costante la traiettoria è un arco di circonferenza di raggio r o una circonferenza completa, se la particella resta sempre nella regione in cui è definito B. Il moto lungo la traiettoria è circolare uniforme con velocità uguale a quella iniziale e velocità angolare:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

In termini vettoriali si ha che:

$$qv\ x\ B = m\omega\ x\ v = -mv\ x\ \omega$$

$$\omega = -\frac{q}{m}B$$

Questa relazione, indipendente dal valore dell'angolo, mostra che la velocità angolare è sempre parallela a B: se la carica q è negativa la velocità angolare ha lo stesso verso di B e quindi, dalla punta di B, il moto appare antiorario; se invece la carica q è positiva la velocità angolare è opposta a B e il moto appare orario. Inoltre tale formula non dipende dal valore della velocità dunque il tempo impiegato a percorre una circonferenza, ovvero il periodo del moto circolare uniforme, non dipende né dal raggio dell'orbita né dalla velocità con cui questa viene descritta. Inoltre da questa relazione è possibile ricavare l'espressione del campo magnetico in cui la particella si sta muovendo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$v = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

$$B = \frac{mv}{qr}$$

- La velocità iniziale della particella forma un qualsiasi angolo $\vartheta$ con il campo magnetico B in cui questa è immersa: la velocità della particella può dunque essere riscritta nelle sue due componenti, normale e parallela al campo B:

$$v_n = v \sin \vartheta$$

$$v_p = v \cos \vartheta$$

La forza magnetica che agisce sulla particella può dunque essere riscritta e, dato che $v_p\ x\ B = 0$ in quanto sono vettori paralleli, è possibile mettere in evidenza anche la formula del raggio di curvatura:

$$F = qv\ x\ B = q(v_n + v_p)x\ B = qv_n\ x\ B$$

$$r = \frac{mv_n}{qb} = \frac{mv \sin \vartheta}{qB}$$

La velocità angolare sarà sempre data dalla relazione, essendo indipendente dall'angolo:

$$\omega = -\frac{q}{m}B$$

Siccome lungo B non c'è forza, $v_p$ resta costante e il moto proiettato nella direzione di B è rettilineo uniforme. La composizione del moto circolare uniforme in un piano ortogonale a B e del moto rettilineo uniforme lungo B dà luogo a un moto elicoidale uniforme avente come asse la direzione di B. È dunque possibile definire il passo dell'elica, cioè la quantità di cui si sposta la particella lungo B come:

$$p = v_p T = \frac{2\pi mv \cos \vartheta}{qB}$$

**Esempi di moti di particelle cariche in campo magnetico uniforme**

Prendiamo ora in considerazione alcuni dispositivi che, dall'analisi del moto di particelle cariche in un campo elettrostatico o magnetico, permettono di dedurre alcune proprietà delle particelle stesse. La legge del moto in campo magnetico è basata sulla forza di Lorentz, forza di cui abbiamo già parlato, ma che ora riscriviamo nella sua forma completa:

$$F = q(E + v \; x \; B)$$

Analizziamo:

- Spettrometri di massa = lo spettrometro di massa è uno strumento che serve a misurare la massa di ioni. Esso separa gli ioni aventi la stessa carica e massa diversa, o più in generale aventi rapporto di massa su carica diverso. Uno spettrometro particolarmente adatto alla misura delle abbondanze isotopiche è quello esclusivamente magnetico progettato intorno al 1920 da Arthur Jeffrey Dempster. Gli ioni prodotti da una sorgente passano attraverso una coppia di fenditure strette che ne definiscono la traiettoria e tra le quali è applicata una differenza di potenziale. All'uscita dalla seconda fenditura tutti gli ioni, a parità di carica, indipendentemente dalla loro massa possiedono l'energia cinetica:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = qV$$

Si ottiene così un fascio di ioni isoenergetici sottile e collimato che entra in una regione in cui agisce soltanto un campo magnetico B uniforme. Essi sono in questo modo sottoposti alla forza di Lorentz. Poiché il campo elettrico E in questo caso è nullo, la forza è dovuta al solo campo magnetico. Il raggio di curvatura della traiettoria, che si ricava eguagliando la forza di Lorentz alla forza centripeta, è dato da:

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2V}$$

$$r = \sqrt{\frac{2V}{B^2}\frac{m}{q}}$$

Poiché la massa m, il campo B e la carica q sono costanti, e la velocità v non cambia in modulo essendo la forza esclusivamente centripeta, anche il raggio di curvatura è costante, dunque la traiettoria descritta dalla particella è un arco di circonferenza. A parità di energia cinetica e di carica, a masse diverse corrispondono velocità diverse, e quindi raggi diversi. Il rapporto massa carica risulta quindi determinato per i vari tipi di ioni dalla misura di r, noti il campo magnetico e la differenza di potenziale acceleratrice.

- Selettore di velocità = un fascio di ioni diversi con la stessa velocità, invece che con la stessa energia cinetica, si ottiene ponendo dopo due fenditure un selettore di velocità: si fanno agire contemporaneamente nella stessa regione un campo elettrostatico E e un campo magnetico B, entrambi uniformi e ortogonali tra loro. Sugli ioni agirà quindi una forza di modulo:

$$F = (E + v\ x\ B) = 0$$

$$E + v\ x\ B = 0$$

Tale forza crea una deflessione della traiettoria dello ione in una data direzione e verso dovuta al campo elettrico; questa deflessione è esattamente compensata però dalla deflessione nella stessa direzione in verso contrario dovuta al campo magnetico. Tutto ciò risulta essere verificato solo se la velocità con cui gli ioni entrano nelle fenditure è pari a:

$$v = \frac{E}{B}$$

Dunque una particella carica può compiere un moto rettilineo uniforme in una regione in cui esistono un campo E e un campo B uniformi se questi sono ortogonali tra di loro e la velocità iniziale della particella stessa è uguale al rapporto dei moduli dei campi, i versi dei campi devono essere tali che il loro prodotto vettoriale abbia lo stesso verso della velocità della particella. Uno spettrometro di massa particolare che sfrutta questo sistema, noto come selettore di velocità, è chiamato spettrometro di Bainbridge. In questo spettrometro gli ioni dopo aver attraversato il settore di velocità entrano in una regione in cui agisce un solo campo magnetico uniforme $B_0$. La traiettoria compiuta dalla particella carica in questa regione è una semicirconferenza di raggio:

$$r = \frac{mv}{qB_0}$$

$$\frac{m}{q} = \frac{B_0 B}{E} r$$

$$r = \frac{E}{B_0 B}\frac{m}{q}$$

- Ciclotrone = un ciclotrone è una macchina usata per accelerare fasci di particelle elettricamente cariche utilizzando una corrente alternata ad alta frequenza ed alta tensione, in associazione con un campo magnetico perpendicolare.

## Campo magnetico in un mezzo indefinito omogeneo

Discutiamo ora le proprietà magnetiche della materia, ovvero il comportamento della stessa in presenza di un campo magnetico prodotto da correnti elettriche. Consideriamo dunque un solenoide indefinito il cui campo magnetico ha espressione $B_0 = \mu_0 ni$, dove con il simbolo di $B_0$ indichiamo il valore del campo che si misura quando il solenoide è vuoto. Indichiamo invece con H il vettore, parallelo a $B_0$, la cui intensità dipende nel caso specifico dalle caratteristiche della sorgente:

$$H = \frac{B_0}{\mu_0} = ni$$

Supponiamo ora di riempire completamente il solenoide con un mezzo omogeneo; la misura del campo magnetico all'interno del materiale può essere effettuata, ad esempio, con una sonda di Hall posta perpendicolarmente a $B_0$. Dalla misura di B troviamo che esso è parallelo a $B_0$ e il rapporto tra i moduli permette di ottenere un valore noto come permeabilità magnetica relativa al vuoto del mezzo considerato. È dunque possibile definire una nuova grandezza nota come permeabilità magnetica assoluta:

$$\frac{B}{B_0} = k_m$$

$$B = k_m B_0 = \mu_0 k_m ni = \mu ni$$

$$\mu = \mu_0 k_m$$

$$B = \mu_0 k_m H = \mu H$$

Possiamo inoltre affermare che sperimentalmente il campo magnetico esistente in un mezzo indefinito omogeneo, ciò oltre ad avere densità costante è costante anche la permeabilità magnetica relativa, in cui è immerso un circuito percorso da corrente è dato da:

$$B = \frac{\mu i}{4\pi} \oint \frac{ds\ x\ u_r}{r^2}$$

Oltre alla legge di Ampere-Laplace è possibile riformulare anche la legge di Ampere valida dunque in presenza di un mezzo indefinito omogeneo:

$$\oint B\, ds = \mu i$$

La variazione $B_m$ del campo magnetico dovuta alla presenza del mezzo è dunque definibile attraverso l'introduzione di una nuova grandezza nota come suscettibilità magnetica che in questo contesto ha il significato di variazione relativa del campo magnetico dovuta al materiale:

$$B_m = B - B_0 = (k_m - 1)B_0 = \chi_m B_0 = \mu_0 \chi_m H$$

$$\chi_m = k_m - 1$$

Possiamo ora introdurre il vettore magnetizzazione che descrive direttamente le proprietà magnetiche del mezzo sotto le azioni delle correnti; a partire da questo valore possiamo riscrivere il campo magnetico B come:

$$B = B_0 + B_m = \mu_0 (H + M)$$

## Correnti Amperiane

L'intensità del campo magnetico nel solenoide, a partire dall'equazione del campo magnetico in un mezzo indefinito omogeneo, può essere riscritta come:

$$B = \mu_0 ni + \mu_0 \chi_m ni$$

È possibile dare un'interpretazione a tale formula: il termine $\mu_0 ni$ è il campo magnetico prodotto dalla corrente di conduzione di densità lineare ni che circola nelle spire del solenoide, il secondo termine deve invece rappresentare l'effetto del mezzo magnetizzato, effetto che risulta identico a quello che sarebbe prodotto da un secondo solenoide e uguale al primo, ma percorso dalla corrente di densità lineare $\mathrm{X}_m ni$. Sulla superficie del mezzo magnetizzato è presente realmente una corrente, anche se non risulta essere una corrente di conduzione, bensì è il risultato di correnti di origine atomica che si formano per affetto del campo magnetico prodotto dalla corrente di conduzione. Tali correnti sono dette Amperiane.

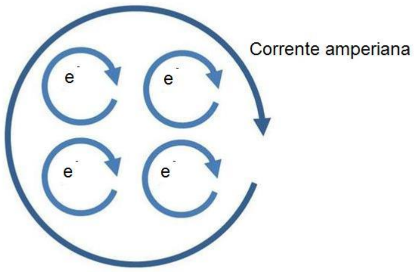
## Proprietà magnetiche della materia

A partire delle proprietà magnetiche è possibile classificare le sostanze in tre diverse categorie:

- Sostanze diamagnetiche = con permeabilità assoluta di poco superiore a quella del vuoto e permeabilità magnetica relativa costante al variale di B e minore di 1. In assenza di campo magnetico i "magnetini" sono diretti a caso e non vi è effetto magnetico. In presenza di un campo magnetico esterno si genera una debole forza attrattiva e i dipoli tendono ad allinearsi lungo le linee, anche se a temperatura ambiente l'agitazione termica contrasta l'orientamento. La magnetizzazione M è opposta a H in quanto dal momento che D è minore di $B_0$ le correnti Amperiane devono dare un contributo opposto a $B_0$, circolando in verso opposto rispetto a quelle di conduzione. Sostanze diamagnetiche sono ad esempio rame, argento e oro.
- Sostanze paramagnetiche = con permeabilità assoluta di poco inferiore a quella del vuoto e permeabilità magnetica relativa costante al variare di B e maggiore di 1. In presenza di un campo magnetico esterno si produce una debole forza repulsiva. Le correnti Amperiane risultano quindi essere inverse alle correnti di conduzione e gli effetti magnetici si sommano. Sostanze paramagnetiche sono alluminio, platino e titanio.
- Sostanze ferromagnetiche = i materiali ferromagnetici così come quelli paramagnetici sono costituiti da atomi che presentono momenti magnetici permanenti. Il ferromagnetismo è la proprietà di alcuni materiali di magnetizzarsi molto intensamente sotto l'azione di un campo magnetico esterno e di restare a lungo magnetizzati quando il campo si annulla, diventando così magneti. Questa proprietà si mantiene solo al di sotto di una certa temperatura, detta temperatura di Curie, al di sopra della quale il materiale si comporta come un materiale paramagnetico. Per il ferro, ad esempio, questa temperatura è di circa 770 °C. Nei materiali ferromagnetici la permeabilità magnetica relativa del materiale non è costante al variare dei campi, come invece avviene nei materiali diamagnetici e nei materiali paramagnetici: la relazione tra il campo di induzione magnetica ed il campo magnetico non è quindi lineare, e nemmeno univoca. Il metodo per trovare le relazioni tra questi vettori è un metodo grafico e la legge seguita dall'andamento del campo magnetico segue il ciclo di isteresi. Poniamo il materiale all'interno di un solenoide: al variare di i, ovvero H0ni, si misura in corrispondenza B; si calcola poi la magnetizzazione $M = \frac{B}{\mu_0} - H$. Si ottengono così le funzioni B(H) e M(H) che vengono riportate in un piano cartesiano.
  Sono materiali ferromagnetici la magnetite, il ferro, il cobalto, il nichel, numerosi metalli di transizione e le loro rispettive leghe.

## Polarizzazione magnetica

Qualsiasi sostanza è costantemente attraversata da numerosissime correnti elettriche: quelle generate dagli elettroni nel loro inarrestabile moto di rivoluzione intorno ai nuclei atomici. In generale però tale movimento è troppo disordinato, e i campi magnetici generati dai diversi atomi finiscono per compensarsi l'uno con l'altro, dando un risultato netto nullo. Nei magneti permanenti, invece, a causa delle specifiche proprietà degli elementi che li costituiscono, il moto degli elettroni intorno al nucleo di ogni atomo è più ordinato e complessivamente può essere assimilato alla corrente prodotta da una spira. Tali spire, interagendo le une con le altre, tendono ad allinearsi in configurazioni ben specifiche. Mentre all'interno del materiale le correnti elettroniche si compensano le une con le altre, sulla superficie questa compensazione non avviene: per questo prendono vita delle correnti elettriche superficiali, le correnti amperiane. Le correnti amperiane svolgono il ruolo di "magnetizzare" l'elemento, come se si trattasse di un vero e proprio solenoide. La



magnetizzazione M è dunque prodotta dalle corrente amperiane locali ed è uguale in modulo alla densità lineare di tali correnti:

$$M = \frac{i_m}{h} = j_{s,m}$$

Un'altra forma della relazione tra magnetizzazione e correnti amperiane si ottiene eseguendo la circuitazione di M lungo un percorso chiuso generico concatenato con la corrente $i_m$. Dunque la circuitazione della magnetizzazione M lungo una linea chiusa risulta essere uguale alla somma delle correnti amperiane concatenate con la linea stessa:

$$\oint M\, ds = i_m$$

Quando un corpo diviene sorgente di campo magnetico, esso si dice polarizzato magneticamente, intendendo con questa espressione che è possibile individuare sulla superficie del corpo due poli, N e S, proprio come in un magnete naturale. Il processo che porta un corpo dall'essere magneticamente neutro a magneticamente polarizzato si chiama polarizzazione magnetica. Data la presenza di due poli, un corpo polarizzato si dice anche dipolo magnetico.
Il fenomeno è analogo al dipolo elettrico. Ma le cause dei due fenomeni sono profondamente differenti: mentre la polarizzazione magnetica è dovuto all'allineamento delle correnti elettroniche, la polarizzazione elettrica nasce da una separazione di cariche elettriche di segno opposto. In questo secondo caso infatti il campo elettrico esterno spinge gli elettroni e i nuclei atomici in direzioni opposte, a causa del segno opposto delle loro cariche elettriche.

**Induttanza**

| **Unità di misura** | |
|---|---|
| Campo magnetico | T |
| Momento di dipolo magnetico | $Am^2$ = J/T |
| Vettore H | A/m |
| Vettore magnetizzazione M | A/m |
| Permeabilità magnetica | H/m |
| Magnetizzazione | A/m |
| Flusso magnetico | Wb = $Tm^2$ |