Integrazione numerica

<u>Definizione grado di esattezza</u>: il grado di esattezza di una formula di quadratura è il massimo interno $r \geq 1$ tale per cui la formula integra esattamente tutti i polinomi di grado r o inferiore

<u>Definizione ordine di convergenza</u>: l'ordine di convergenza o ordine di accuratezza di una formula di quadratura composita è l'ordine di convergenza dell'errore rispetto H

Formule punto medio semplice

<u>Grado di esattezza:</u> $r = 1$

<u>Errore</u> associato alla formula del punto medio semplice è:

$$e_{pm} = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

Data una funzione $f(x)$ definita e continua in $I = [a, b]$:

$\bar{x} = \dfrac{a+b}{2}$

$I_{pm} = (b-a) f(\bar{x})$

Formule punto medio composito

<u>Grado di esattezza:</u> $r = 1$

<u>Errore</u> associato alla formula del punto medio composito è:

$$e_{pm}{}^{c} = \frac{b-a}{24} H^2 f''(\xi)$$

Data una funzione $f(x)$ definita e continua in $I = [a, b]$:

N	numero di sottointervalli
$H = \frac{b-a}{N}$	ampiezza sottointervalli
$\{x_k\}_{k=0}^{N}$	nodi dove $x_k = a + kH$

$\overline{x_k} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$

$I_{pm}{}^{c} = H \sum_{k=1}^{N} f(\overline{x_k})$

```
function [ I ] = pmedcomp1( a,b,N,f )

h = (b-a)/N;
x = [a+h/2:h:b-h/2];
I = h.*sum(f(x))

end
```

Formule dei trapezi semplice

<u>Grado di esattezza:</u> $r = 1$

<u>Errore</u> associato alla formula del trapezio semplice è:

$$e_{tr} = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

	Data una funzione $f(x)$ definita e continua in $I=[a,b]$: $I_{tr} = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$
Formule dei trapezi composito	Grado di esattezza: $r=1$ Errore associato alla formula del trapezio composito è: $$e_{tr}{}^{c} = -\frac{b-a}{12}H^2 f''(\xi)$$
	Data una funzione $f(x)$ definita e continua in $I=[a,b]$: N numero di sottointervalli $H = \frac{b-a}{N}$ ampiezza sottointervalli $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ nodi dove $x_k = a + kH$ $I_{tr}{}^{c} = \frac{H}{2}[f(a)+f(b)] + H\sum_{k=1}^{N} f(x_k)$

	`function [ I ] = trapcomp1( a,b,N,f )`
	
	`h = (b-a)/N;`
	`x = [a:h:b];`
	`y = f(x);`
	`I = h/2*y(1)+h/2*y(N+1)+h*sum(y(2:N))`
	
	`end`

Formule di Simpson semplice	Grado di esattezza: $r=3$ Errore associato alla formula di Simpson semplice è: $$e_{sim} = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$$
	Data una funzione $f(x)$ definita e continua in $I=[a,b]$: $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ $I_{sim} = \frac{b-a}{6}[f(a)+f(b)+4f(\bar{x})]$
Formule di Simpson composito	Grado di esattezza: $r=3$ Errore associato alla formula di Simpson composita è: $$e_{sim}{}^{c} = -\frac{b-a}{2880}H^4 f''(\xi)$$
	Data una funzione $f(x)$ definita e continua in $I=[a,b]$: N numero di sottointervalli $H = \frac{b-a}{N}$ ampiezza sottointervalli

	$\{x_k\}_{k=0}^{N}$ nodi dove $x_k = a + kH$ $\overline{x_k} = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ $I_{sim}{}^{c} = \frac{H}{6}\sum_{k=1}^{N}[f(x_{k-1}) + f(x_k) + 4f(\overline{x_k})]$
	see code below

```
function [ I ] = simpcomp1( a,b,N,f )

h = (b-a)/N;
I = 0;
xold = a;

for k = 1:N
    x = a+k*h;
    xsegn = (xold+x)/2;
    I = I + f(xold)+f(x)+4*f(xsegn);
    xold = x;
end
I = I*h/6

end
```

Formula dell'errore di punto medio semplice

Enunciato: l'errore associato alla formula del punto medio semplice è:

$$e_{pm} = I(f) - I_{pm}(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

Dimostrazione: calcoliamo ora l'integrale della funzione:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx =$$

Sostituisco la funzione con il suo sviluppo in serie di Taylor:

$$f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x-\overline{x}) + \frac{1}{2} f''(\eta(\overline{x}))(x-\overline{x})^2$$

Dove η è un o-piccolo

$$= \int_a^b \left[f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x-\overline{x}) + \frac{1}{2} f''(\eta(\overline{x}))(x-\overline{x})^2 \right] dx =$$

$$= \int_a^b f(\overline{x})dx + \int_a^b f'(\overline{x})(x-\overline{x})dx + \int_a^b \frac{1}{2} f''(\eta(\overline{x}))(x-\overline{x})^2 dx =$$

Posso portare fuori dall'integrale $f'(\overline{x})$ perché, essendo una funzione valutata in un punto, è un numero ed è indipendente da x

$$= f(\overline{x}) \int_a^b dx + f'(\overline{x}) \int_a^b (x-\overline{x})dx + \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x-\overline{x})^2 dx =$$

$\int_a^b (x-\overline{x})dx$ è un termine nullo poiché si sta facendo l'integrale di una funzione simmetrica quindi si somma e sottrae la stessa quantità di "area"

Per teorema del valor medio:

$$f''(\eta(\overline{x})) = f''(\xi)$$

Posso portare fuori dall'integrale perché, essendo una funzione valutata in un punto, è un numero ed è indipendente da x

$$= f(\overline{x})(b-a) + 0 + \frac{1}{2} f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{12} =$$

Si può dimostrare che:

$$\int_a^b (x-\overline{x})^2 dx = \frac{(b-a)^3}{12}$$

$$= I_{pm}(f) + \frac{1}{2} f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{12} =$$

$$= I_{pm}(f) + f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{24}$$

$$e_{pm} = I(f) - I_{pm}(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$