ANALISI ADIMENSIONALE

Introduzione

Spesso può essere utile stimare il valore di alcune grandezze dette di stato (dipendenti) a partire da altre grandezze fisiche dette variabili di controllo (indipendenti). Tale predizione può essere fatta risolvendo un modello matematica.

Teorema Π

Identifichiamo con g_0 la variabile di stato e con $g_1, g_2, \dots, g_n$ le n variabili di controllo. Ipotizziamo che esista un legame fisico (attualmente incognito) che leghi le variabili di controllo alla variabile di stato:

$$g_0 = f(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

Per poter determinare il legame fisico si può procedere in due modi diversi:

- Approccio sperimentale = ipotizziamo di far variare una variabile di controllo alla volta mantenendo le altre costanti e di studiare come varia la variabile di stato in funzione di questi cambiamenti. In questo modo si indaga completamente la dipendenza di g_0 dalle n variabili di controllo ma ciò richiede un numero di esperimenti estremamente elevato anche per poche variabili di controllo
- Approccio adimensionale = tutte le variabili (sia quella di stato che quelle di controllo) che compaiono nell'equazione sopra scritta sono dimensione ovvero sono espresse in un sistema di misura standard. La scelta del sistema di misura da usare è assolutamente arbitraria e dunque non cambia il legame fisico che sussiste tra le variabili. Risulta quindi lecito passare da un sistema di rifermento standard a uno specifico funzione del tipo di problema da analizzare. Scegliamo ora un base (ovvero un insieme) di k grandezze che sono dimensionalmente indipendenti tra loro.
  Ridefiniamo un problema con solo tre variabili di controllo:

  $$g_0 = f(g_1, g_2, g_3)$$

  La nostra terna di basa sarà caratterizzata da g_1, g_2, g_3. Identifichiamo ora l'unità di misura della grandezza g_0 rispetto a tale terna:

  $$\boxed{\text{Gruppo } \Pi \text{ associato alla grandezza } g_0} \longrightarrow \Pi_0 = \frac{g_0}{g_1^\alpha g_2^\beta g_3^\gamma}$$

  dove α, β, γ sono tre esponenti che si determinano imponendo che Π_0 sia un numero puro (adimensionale) ovvero:

  $$[g_0] = [g_1]^\alpha [g_2]^\beta [g_3]^\gamma$$

  Questa equazione corrisponde a un sistema di tre equazioni scalari. Definiamo poi i gruppi Π associati a ciascuna variabile di controllo che chiaramente saranno pari a 1, in questo caso gli esponenti sono noti:

  $$\Pi_1 = \frac{g_1}{g_1^1 g_2^0 g_3^0} = 1$$

  $$\Pi_2 = \frac{g_2}{g_1^0 g_2^1 g_3^0} = 1$$

  $$\Pi_3 = \frac{g_3}{g_1^0 g_2^0 g_3^1} = 1$$

  Possiamo ora ridefinire il problema iniziale nel nuovo sistema di misura:

$$\Pi_0 = f^*(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n) = f^*(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n)$$

Combinando questa equazione con quella che descrive l'unità di misura della grandezza g_0 rispetto a tale terna si può ricavare:

$$\Pi_0 = \frac{g_0}{g_1^\alpha g_2^\beta g_3^\gamma}$$

$$\Pi_0 = f^*(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n)$$

$$\frac{g_0}{g_1^\alpha g_2^\beta g_3^\gamma} = f^*(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n)$$

$$g_0 = g_1^\alpha g_2^\beta g_3^\gamma f^* f^*(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n)$$

Abbiamo così dimostrato che in un sistema fisico è sempre possibile, con un'opportuna scelta di unità di misura, ridurre il numero minimo delle variabili di controllo di tante quantità quante sono le unità di misura indipendenti e quindi fondamentali. Questo è l'enunciato del teorema di Buckingham detto teorema Π. Questo teorema garantisce l'universalità delle leggi fisiche se espresse in termini adimensionali.
L'approccio adimensionale risulta essere migliore rispetto a quella sperimentale perché:

- Riduce il numero degli esperimenti necessari
- Permette di ottenere leggi in forma universale
- Vantaggio pratico

Enunciamo ora la condizioni sufficiente del teorema Π: è sufficiente che i gruppi Π associati alle variabili di controllo siano uguali affinché sue sistemi siano in similitudine completa. Evidenziamo infine un caso particolare secondo cui se un gruppo Π diventa molto piccolo o molto grande scompare la dipendenza di Π_0 da esso ovvero Π_0 non dipende più da Π. Se ciò si verifica si dice che Π_0 è autosimile rispetto a Π.

Modellazione

Come accennato in precedenza è possibile predire il comportamento della realtà utilizzando un modello ovvero un prototipo. Per fare ciò occorre conoscere il rapporto tra una generica grandezza misurata sul modello e la corrispondente grandezza del prototipo. Se questo rapporto detto scala tra due sistemi è costante allora i due sistemi sono in similitudine completa. Elenchiamo i diversi tipi di similitudini:

- Similitudine completa = rapporto tra grandezze omogenee e omologhe in due sistemi è costante
- Similitudine geometrica = rapporto tra le lunghezze di due segmenti omologhi in due sistemi è costante
- Similitudine cinematica = rapporto tra le velocità di due punti omologhi è costante
- Similitudine dinamica = rapporto tra le forze agenti su due punti è costante

Equazione di continuità in forma adimensionale

Riprendiamo ora l'equazione di continuità e alla luce di quanto appena detto ricaviamola in termini adimensionali. Per determinarla occorre in primo luogo determinare le grandezze scala cioè le variabili di controllo che fissano l'ordine di grandezza delle quantità ad esse omogenee:

$\check{x} = \frac{x}{L}$ $\quad \check{y} = \frac{y}{L}$ $\quad \check{z} = \frac{z}{L}$ spazio

$\check{u} = \frac{u}{V}$ $\quad \check{v} = \frac{v}{V}$ $\quad \check{w} = \frac{w}{V}$ velocità

$\check{t} = \frac{t}{T}$ tempo

$\breve{p} = \frac{p}{P}$ pressione

$\breve{\rho} = \frac{\rho}{R}$ densità

Scriviamo ora l'equazione di continuità in termini adimensionali:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0$$

$$\frac{R}{T}\frac{\partial \breve{\rho}}{\partial \breve{t}} + \frac{RV}{L}\breve{\nabla} \cdot (\breve{\rho}\breve{\bar{v}}) = 0$$

$$\frac{\frac{R}{T}\frac{\partial \breve{\rho}}{\partial \breve{t}} + \frac{RV}{L}\breve{\nabla} \cdot (\breve{\rho}\breve{\bar{v}})}{RV/L} = 0$$

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial \breve{\rho}}{\partial \breve{t}} + \breve{\nabla} \cdot (\breve{\rho}\breve{\bar{v}}) = 0$$

Il rapporto L/VT èrappresenta il numero di Strouhal che rappresenta il rapporto tra il tempo che il fluido impiega per attraversa il dominio geometrico L/V e il tempo scala associato con la non stazionarietà del moto T. Dunque, si ottiene:

$$St\frac{\partial \breve{\rho}}{\partial \breve{t}} + \breve{\nabla} \cdot (\breve{\rho}\breve{\bar{v}}) = 0$$