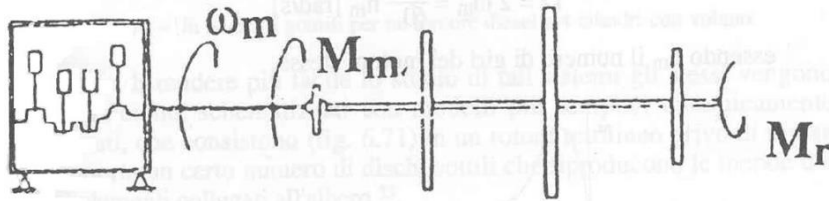


## ROTORI TORSIONALI

### Introduzione

In alberi a gomito o alberi rettilinei su cui sono calettati più dischi (ad esempio alberi con più ingranaggi o pulegge, giunti di pompe o turbine) si sono notate sperimentalmente, per prolungato funzionamento a particolari velocità di rotazione, rotture a fatica senza osservare particolari elevate vibrazioni flessionali né sull'albero, né sul supporto. Tali rotture sono imputabili a vibrazioni torsionali cui gli stessi alberi possono essere sottoposti.

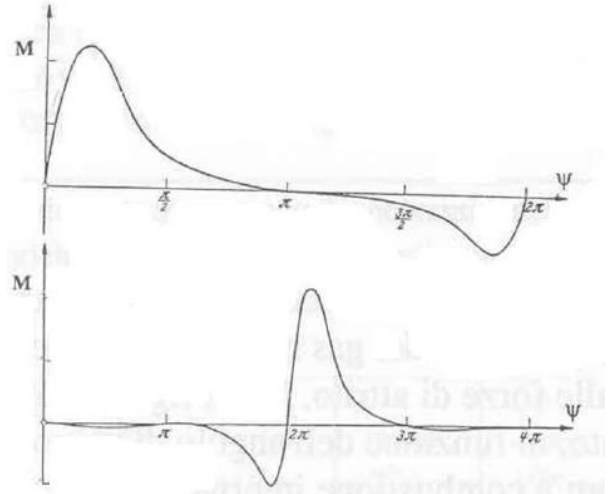
Per meglio comprendere il meccanismo associato a tali vibrazioni, immaginiamo il generico sistema meccanico mostrato nella figura facente parte di una trasmissione di un autoveicolo.



Su di esso sono applicate due coppie:

1. Coppia resistente  $M_r$  = coppia applicata dal lato delle ruote che è possibile supporre, in questo caso per semplicità, costante
2. Coppia motrice  $M_m$  = coppia applicata dal lato del motore che varia, in genere, con legge che dipende dalle caratteristiche del motore impiegato. Tale coppia torcente che sollecita l'albero è data dal contributo delle azioni prodotte da:
  - pressione dei gas nei cilindri
  - forze di inerzia
  - forza di gravità
  - forze di attrito

Nella figura si riporta, a titolo di esempio, l'andamento, in funzione dell'angolo di manovella, di tale coppia nel caso di un motore a combustione interna a due e quattro tempi. Come è possibile osservare, tale coppia è di tipo periodico ed è dunque scomponibile in serie di Fourier:



$$M_m = M_0 + M_1 \cos(\Omega_1 t + \psi_1) + M_2 \cos(\Omega_2 t + \psi_2) + \dots = M_0 + \sum_{i=1}^n M_i \cos(\Omega_i t + \psi_i)$$

dove  $\Omega$  è la pulsazione dell'armonica fondamentale. In generale l'armonica fondamentale è legata alla velocità angolare di rotazione  $\omega_m$ ; tale legame dipende dal numero di cilindri e dal tipo di motore. Analizziamo dunque questa relazione in funzione del tipo di motore:

- Motore a 2 tempi monocilindrico:  $\Omega = \omega_m = \frac{2\pi}{60} n_m$
- Motore a 4 tempi monocilindrico:  $\Omega = \frac{\omega_m}{2} = \frac{\pi}{60} n_m$
- Motore a 4 tempi a 4 cilindri:  $\Omega = 2\omega_m = \frac{4\pi}{60} n_m$

$n_m$  è il numero di giri del motore stesso

Tempi= n° operazioni per un ciclo di combustione

È stata ricavata una formula per calcolare  $\Omega$  per qualsiasi configurazione; prendila con le pinze perché è solo deduttiva, non ha dietro nessun fondamento confermato da qualche risorsa:

$$\Omega = \frac{\omega_m \cdot n^\circ \text{ cilindri}}{\frac{n^\circ \text{ tempi}}{2}}$$

Possiamo ora definire come velocità critiche torsionali  $\omega_m$ , le velocità di rotazione in corrispondenza delle quali la pulsazione  $\Omega$  (o un suo multiplo) coincide con una delle pulsazioni proprie torsionali dell'albero  $\omega_i$ .

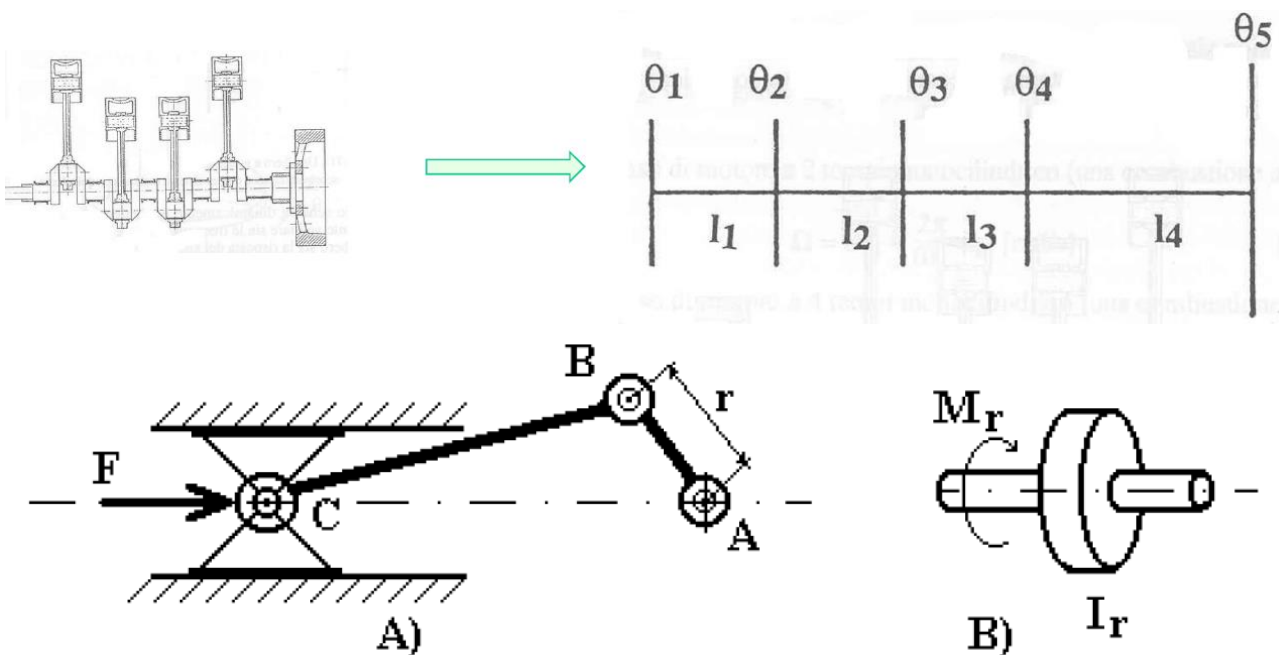
### Riduzione a un sistema equivalente

Analizziamo ora, anche se per sommi capi, le principali metodologie di analisi per valutare tali velocità critiche torsionali e i modelli più utilizzati a tale scopo in fase di analisi e progettazione.

Il generico sistema elastico torsionale del motore e l'associata macchina rappresenta un sistema meccanico piuttosto complicato dovuta alla reale distribuzione di massa e di elasticità. Al fine di rendere più facile lo studio di tali sistemi gli stessi vengono tradizionalmente schematizzati con modelli più semplici dinamicamente equivalenti, che consistono in un rotore rettilineo privo di massa che supporta un certo numero di dischi sottili che riproducono le inerzie dei diversi elementi collegati all'albero.

Tali dischi sono considerati come corpi rigidi dotati di momenti di inerzia equivalenti collegati tra di loro da elementi elastici torsionali equivalenti. I dischi sono, di solito, posizionati in corrispondenza del centro di ciascuna manovella e in corrispondenza di eliche, propulsori e ingranaggi. Schemi più raffinati permettono di riprodurre analiticamente anche la reale distribuzione di massa e di rigidità. La schematizzazione deve comprendere ovviamente tutta la linea d'assi comprensiva di motore, trasmissione e utilizzatore.

Il sistema viene dunque ridotto in modo tale che soddisfi la stessa equazione dell'energia cinetica del sistema effettivo. Il sistema ridotto si ottiene da quello effettivo scegliendo un asse di riduzione e riducendo a tale asse tutte le masse e le forze del sistema effettivo con la condizione che esse abbiano la stessa energia. In tale modo, dunque, le masse ridotte avranno la stessa energia cinetica di quelle effettive e le forze ridotte compiranno lo stesso lavoro. Il sistema ridotto sarà quindi costituito da un elemento di momento di inerzia di massa  $I_r$  e da un momento  $M_r$ , che rappresenta la forza  $F$ , agente sul cursore, ridotta all'asse di riduzione. Vediamo di seguito alcuni esempi di riduzione di sistemi effettivi:



Con tale approccio, l'analisi delle velocità critiche torsionali deve essere quindi preceduta da calcoli preliminari basate sull'analisi statica del sistema completo (albero a gomiti, dischi, volani, frizioni ecc.) per

definire le rigidezze equivalenti dei singoli tratti di rotore e sull'analisi dinamica al fine di determinare i momenti di inerzia equivalenti delle singole parti rotanti e delle parti in movimento con esse (bielle e pistoni). La schematizzazione può essere fatta utilizzando il metodo degli elementi finiti in genere tridimensionali, oppure si può ricorrere ad essa per definire i parametri da introdurre nello schema più semplice a parametri concentrati.

Definito dunque lo schema dinamicamente equivalente è possibile successivamente valutare:

- sia le frequenze proprie e i relativi modi di vibrare del sistema libero
- sia la risposta del sistema forzato dalle coppie agenti sullo stesso motrici e resistenti utilizzando le normali tecniche analitiche e numeriche già ampiamente descritte.

A scopi didattici è utile, per una migliore comprensione di quanto verrà spiegato in seguito, analizzare come è possibile schematizzare un semplice sistema vibrante mostrato nella figura formato da un albero verticale incastrato a un estremo e su cui è calettato un disco rigido.

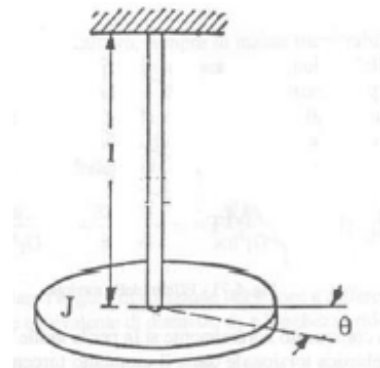
### Schematizzazione con 1 gdl: modello a parametri concentrati

Nell'ipotesi in cui la massa dell'albero sia trascurabile rispetto alla massa aggiunta, tale sistema risulta essere a un solo grado di libertà: in tal caso è facile ricavare lo schema dinamico equivalente, che risulta essere analogo, in questo caso, alla struttura reale. Dunque si avrà:

$$J_p = \frac{WD^2}{8g} \quad k_t = \frac{GJ_p}{L}$$

$$J\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_t}{J}}$$



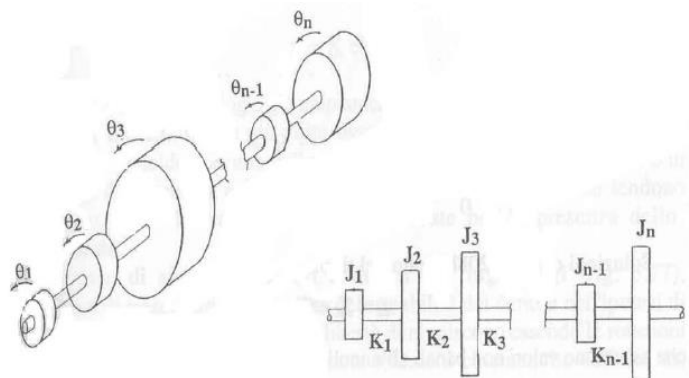
### Schematizzazione con n gdl: modello a parametri concentrati

Nel caso in cui ci si trovi davanti a una struttura più complessa di quella sopra descritta e dunque avente un albero con n dischi rigidi caletta su di esso si deve procedere con un approccio a più gradi di libertà. L'equazione di moto sarà dunque del tipo:

$$[M]\ddot{\underline{x}} + [K]\underline{x} = \underline{0}$$

Dunque, ipotizziamo una soluzione di primo tentativo:  $\underline{x} = \underline{X}e^{i\omega t}$  che sostituendola nell'equazione di moto:

$$-[M]\omega^2 \underline{X}e^{i\omega t} + [K]\underline{X}e^{i\omega t} = \underline{0}$$



Dunque, per risolvere questo tipo di sistemi è opportuno utilizzare un modello a parametri concentrati; tale approccio trasforma il sistema di studio in un sistema dinamico equivalente ad n gradi di libertà. Questo modello è applicabile se l'inerzia dell'albero è trascurabile rispetto alle restati inerzie in gioco. Si considera l'albero come un elemento elastico dotato di rigidezza torsionale ma privo di massa (è possibile a seconda dell'approssimazione scelta considerare anche le proprietà smorzanti del materiale). Per il calcolo delle rigidezze torsionale, consideriamo 3 parametri:

- momento polare d'inerzia  $J_p$  che per le sezioni circolari vale  $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$

- modulo elasticità al taglio; è una proprietà del materiale funzione del modulo di Young e del coefficiente di Poisson e vale  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
- lunghezza della trave  $L$

Definiamo quindi la rigidezza torsionale come:

$$k_t = \frac{GJ_P}{L}$$

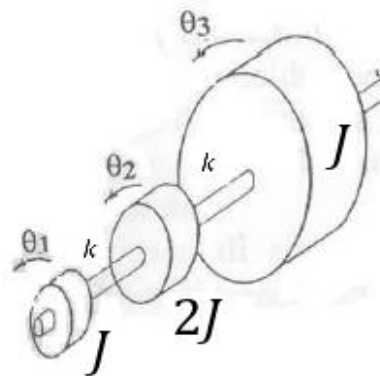
Gli elementi calettati vengono schematizzati come dischi rigidi dotati di momenti d'inerzia; l'inerzia per questi corpi può essere calcolata come:

$$J = \frac{MR^2}{2}$$

### Schematizzazione con 2 gdl: modello a parametri concentrati (approccio classico)

Approfondiamo meglio il modello a parametri concentrati applicato a sistemi a più gradi di libertà con un esempio. Consideriamo ora un generico sistema costituito da 3 dischi calettati su un albero di rigidezza torsionale  $k_t$ . Definiamo i vettori dei gradi libertà:

$$\underline{\vartheta} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix}$$



Non avendo considerato forzanti o elementi dissipativi, l'equazione del moto del sistema sarà:

$$[M]\ddot{\underline{\vartheta}} + [K]\underline{\vartheta} = \underline{0}$$

Utilizzando gli stessi principi usati in precedenza per risolvere le equazioni di moto ricaviamo:

- Massa generalizzata:

$$[M] = [\lambda_m]^T [M_F] [\lambda_m]$$

$$[M_F] = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

$\lambda_m$	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$	$\vartheta_3$
$\omega_1$	1	0	0
$\omega_2$	0	1	0
$\omega_3$	0	0	1

$$[M] = [\lambda_m]^T [M_F] [\lambda_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

- Rigidezza generalizzata:

$$[K] = [\lambda_k]^T [K_F] [\lambda_k]$$

$$[K_F] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_k & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \\ \hline \Delta l_1 & -1 & +1 & 0 \\ \Delta l_2 & 0 & -1 & +1 \end{array}$$

$$[K] = [\lambda_k]^T [K_F] [\lambda_k] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

L'equazione di moto linearizzata diventa:

$$[M]\underline{\ddot{\vartheta}} + [K]\underline{\vartheta} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \underline{\ddot{\vartheta}} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \underline{\vartheta} = \underline{0}$$

Risolviamo poi l'equazione di moto, così da ricavare le frequenze proprie, sempre nel medesimo modo quindi ipotizziamo una soluzione esponenziale per l'equazione di moto omogenea, che deriviamo e sostituiamo all'interno dell'equazione del moto; trascuriamo poi la soluzione banale così da ottenere:

$$\underline{\vartheta} = \underline{\vartheta}_0 e^{i\omega t}$$

$$\underline{\dot{\vartheta}} = \underline{\vartheta}_0 i\omega e^{i\omega t}$$

$$\underline{\ddot{\vartheta}} = -\underline{\vartheta}_0 \omega^2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \underline{\ddot{\vartheta}} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \underline{\vartheta} = \underline{0}$$

$$[M]\underline{\ddot{\vartheta}} + [K]\underline{\vartheta} = \underline{0}$$

$$-\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \underline{\vartheta}_0 \omega^2 e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \underline{\vartheta}_0 e^{i\omega t} = \underline{0}$$

$$-[M]\underline{\vartheta}_0 \omega^2 e^{i\omega t} + [K]\underline{\vartheta}_0 e^{i\omega t} = \underline{0}$$

$$\underline{\vartheta}_0 \left( -\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \omega^2 + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \right) = \underline{0}$$

$$(-[M]\omega^2 + [K])\underline{\vartheta}_0 = \underline{0}$$

$$\underline{\vartheta}_0 = 0$$

$$\underline{\vartheta}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} & -\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \omega^2 + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -J\omega^2 + k & -k & 0 \\ -k & -2J\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -J\omega^2 + k \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$(-[M]\omega^2 + [K]) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -J\omega^2 + k & -k & 0 \\ -k & -2J\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -J\omega^2 + k \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \left| \quad \det(-[M]\omega^2 + [K]) = 0 \right.$$

$$(-J\omega^2 + k)[(-2J\omega^2 + 2k)(-J\omega^2 + k) - (-k)(-k)] - (-k)[(-k)(-J\omega^2 + k) - 0] + 0 = 0$$

$$(-J\omega^2 + k)[(-2J\omega^2 + 2k)(-J\omega^2 + k) - k^2] - k^2(-J\omega^2 + k) + 0 = 0$$

$$(-J\omega^2 + k)[(-2J\omega^2 + 2k)(-J\omega^2 + k) - k^2 - k^2] = 0$$

$$(-J\omega^2 + k)[(-2J\omega^2 + 2k)(-J\omega^2 + k) - 2k^2] = 0$$

$$(-J\omega^2 + k)[2J^2\omega^4 - 2Jk\omega^2 - 2Jk\omega^2 + 2k^2 - 2k^2] = 0$$

$$(-J\omega^2 + k)[2J^2\omega^4 - 4Jk\omega^2] = 0$$

$$(-J\omega^2 + k)[J^2\omega^2 - 2Jk]2\omega^2 = 0$$

$$\omega^2(-J\omega^2 + k)[J^2\omega^2 - 2Jk] = 0$$

Calcolo quindi le frequenze proprie:

$$\omega^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_1^2 = 0$$

$$(-J\omega^2 + k) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_2^2 = \frac{k}{J}$$

$$(J^2\omega^2 - 2Jk) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_3^2 = \frac{2Jk}{J^2} = \frac{2k}{J}$$

Scrivo ora il sistema matriciale di partenza in un sistema di 3 equazioni:

$$\underline{\vartheta}_0 \left( - \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \omega^2 + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \right) = \underline{0} \quad \underline{\vartheta}_0 = \begin{cases} \vartheta_{0,1} \\ \vartheta_{0,2} \\ \vartheta_{0,3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-J\omega^2 + k)\vartheta_{0,1} - k\vartheta_{0,2} = 0 \\ (-2J\omega^2 + 2k)\vartheta_{0,2} - k\vartheta_{0,1} - k\vartheta_{0,3} = 0 \\ (-J\omega^2 + k)\vartheta_{0,3} - k\vartheta_{0,2} = 0 \end{cases}$$

La terza equazione è combinazione lineare delle prime due quindi studiamo solo le prime due:

$$\begin{cases} (-J\omega^2 + k)\vartheta_{0,1} - k\vartheta_{0,2} = 0 \\ (-2J\omega^2 + 2k)\vartheta_{0,2} - k\vartheta_{0,1} - k\vartheta_{0,3} = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo l'espressione di  $\vartheta_{0,2}$  mentre dalla seconda ricaviamo  $\vartheta_{0,3}$  ( $\vartheta_{0,1} = 1$ ):

$$\begin{cases} \vartheta_{0,2} = \frac{(-J\omega^2 + k)\vartheta_{0,1}}{k} \\ \vartheta_{0,3} = \frac{(-2J\omega^2 + 2k)\vartheta_{0,2} - k\vartheta_{0,1}}{k} \end{cases}$$

Sostituiamo ora le frequenze proprie e calcoliamo così i modi di vibrare:

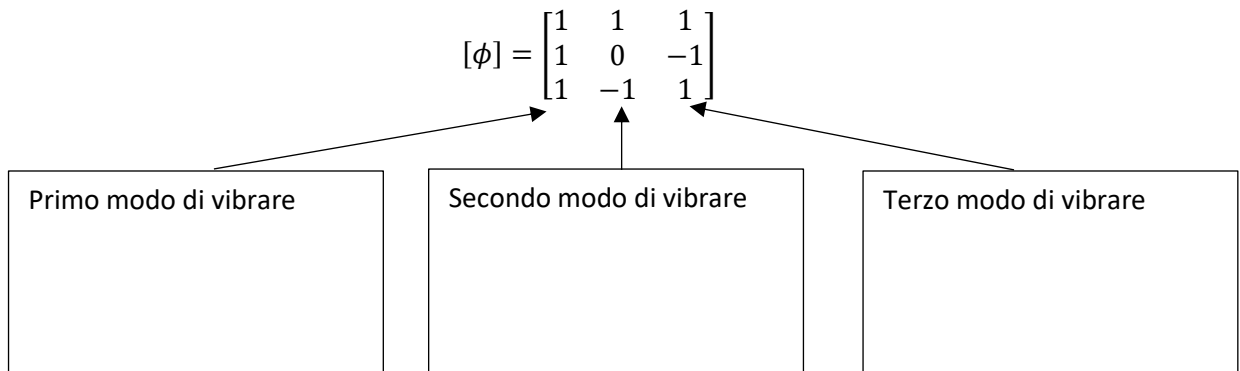
$$\omega_1^2 = 0 \rightarrow \omega_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \vartheta_{0,2} = \frac{(-J\omega^2 + k)\vartheta_{0,1}}{k} = \vartheta_{0,1} = 1 \\ \vartheta_{0,3} = \frac{(-2J\omega^2 + 2k)\vartheta_{0,2} - k\vartheta_{0,1}}{k} = 1 \end{cases} \rightarrow \underline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{J} \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{J}} \rightarrow \begin{cases} \vartheta_{0,2} = \frac{(-J\frac{k}{J} + k)\vartheta_{0,1}}{k} = 0 \\ \vartheta_{0,3} = \frac{(-2J\frac{k}{J} + 2k)\vartheta_{0,2} - k\vartheta_{0,1}}{k} = -\vartheta_{0,1} = -1 \end{cases} \rightarrow \underline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_3^2 = \frac{2k}{J} \rightarrow \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{J}} \rightarrow \begin{cases} \vartheta_{0,2} = \frac{(-J\frac{2k}{J} + k)\vartheta_{0,1}}{k} = -1 \\ \vartheta_{0,3} = \frac{(-2J\frac{2k}{J} + 2k)\vartheta_{0,2} - k\vartheta_{0,1}}{k} = \vartheta_{0,1} = 1 \end{cases} \rightarrow \underline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Schematizzazione con 2 *gdl*: modello a parametri concentrati (approccio modale)

Avendo trovato i modi di vibrare possiamo ora passare all'approccio modale e ricavare la matrice modale sarebbe:



Nota ora la matrice modale è possibile calcolare  $[m_q]$  e di  $[k_q]$ :

- Matrice di massa:

$$[m_q] = [\phi]^T [M] [\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & 4J \end{bmatrix}$$

- Matrice di rigidità:

$$[k_q] = [\phi]^T [K] [\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 8k \end{bmatrix}$$

Possiamo ora riscrivere il nuovo sistema che ne deriva dall'approccio modale:

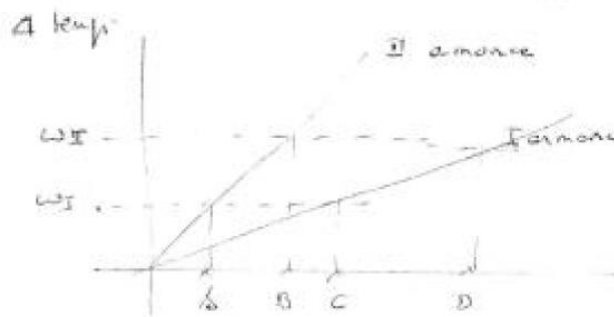
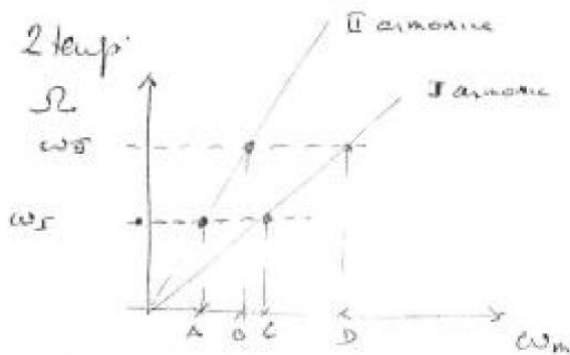
$$[m_q] \underline{\ddot{q}} + [k_q] \underline{q} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & 4J \end{bmatrix} \underline{\ddot{q}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 8k \end{bmatrix} \underline{q} = \underline{0} \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4J\ddot{q}_1 = 0 & \rightarrow & \omega_1 = 0 \\ 2J\ddot{q}_2 + 2kq_2 = 0 & \rightarrow & \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{J}} \\ 4J\ddot{q}_3 + 8kq_3 = 0 & \rightarrow & \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{J}} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \ddot{\vartheta} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \vartheta = 0$$

$$H_m = M_1 \cos(\Omega t + \phi_1) + M_2 \cos(2\Omega t + \phi_2) + \dots$$



A-B-C-D  
 Non regimi di  
 velocità in cui  
 lo I o lo II armonico  
 della coppia motrice  
 "eccitano" le forze  
 proprie mettendole in  
 risonanza al sito  
 ⇒ Velocità critiche torsionali

### Schematizzazione con i continui

Nel caso in cui la massa dell'albero non sia trascurabile rispetto alle masse concentrate, lo stesso albero non può essere schematizzato con un elemento puramente elastico, ma occorre tener conto dell'effettiva distribuzione di massa. Per risolvere tali tipi di problemi è possibile ricorrere all'approccio tipico dei continui. Se dunque si dovesse tenere conto della massa dell'albero l'equazione che definisce il moto torsionale di un generico tratto di albero omogeneo e privo di discontinuità è data dalla seguente equazione:

$$\vartheta_x = \left( A \cos \frac{\omega}{C} \xi + B \sin \frac{\omega}{C} \xi \right) e^{i\omega t}$$

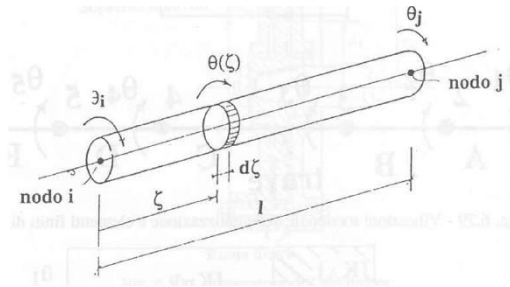
$$C = \frac{G}{\rho}$$

Dove  $\xi$  è la coordinata spaziale diretta come l'asse dell'albero,  $\rho$  è la densità,  $G$  è il modulo di elasticità al taglio e  $C$  è il rapporto tra il modulo di elasticità al taglio e la densità stessa.



### Schematizzazione a elementi finiti

Parimenti a quanto osservato per quel che riguarda le pulsazioni flessionali, è possibile analizzare le vibrazioni torsionali di un albero anche mediante un approccio a elementi finiti. A tale proposito consideriamo una trave di cui si tenga conto dei soli moti torsionali (tali moti sono in realtà, con ottima approssimazione, disaccoppiati dagli altri moti). Per descrivere il moto di tale sistema si assumono dunque le rotazioni dei nodi di estremità del generico elemento finito. Gli elementi finiti di trave sono lineari per cui è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti. Per ogni nodo quindi le matrici di rigidezza e massa totali possono essere scritte sommando i contributi degli elementi di trave adiacenti.



$$[K_{\theta x}] = \frac{GJ_p}{l_j} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}; \quad [M_{\theta x}] = \rho J l_j \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

