FLUIDI IDEALI

Equazioni di Eulero

Fino ad ora abbiamo sempre parlato di una sostanza in generale senza specificare che tipo di fluido stessimo analizzando. Per semplicità parliamo ora dei fluidi ideali cioè fluidi per i quali gli sforzi tangenziali sono nulli. Gli sforzi tangenziali risultano essere nulli se si verifica una di queste due condizioni:

1. La viscosità è nulla
2. Il gradiente di velocità nella direzione trasversale al flusso è nullo

La prima condizione è di fatto irrealizzabile, mentre la seconda si può verificare per fluidi reali in regioni sufficientemente lontane dalle pareti solide. Proprio per questo motivo la condizione di fluido ideale oltre ad avere scopo propedeutico per lo sviluppo delle successive espressioni ha anche diverse applicazioni pratiche, come in ambito aerodinamico. Dal momento che gli sforzi tangenziali sono nulli il tensore degli sforzi per un fluido ideale si riduce al prodotto tra la pressione per la matrice identità:

$$\bar{\bar{\phi}} = p\bar{\bar{I}}$$

Occorre ora introdurre questa nozione nell'equazione indefinita di bilancio della quantità di moto per una qualsiasi sostanza $-\nabla \cdot \bar{\bar{\phi}} + \rho \bar{f} = \rho \bar{a}$ e per farlo dobbiamo però svilupparla:

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\phi}} = \frac{\partial \overline{\phi_J}}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_{ji}}{\partial x_j}\hat{\iota_i} = \frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ji}\hat{\iota_i} = \frac{\partial p}{\partial x_i}\hat{\iota_i} = \nabla p$$

$$\phi_{ji} = p\delta_{ji}$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\phi}} = \nabla p$$

Dove δ_{ji} è detto delta di Kronecker e vale 1 se $i = j$, vale invece 0 se $i \neq j$. Sostituendo tale risultato si ottiene:

$$\rho(\bar{f} - \bar{a}) = \nabla p$$

Questa equazione e l'equazione di continuità costituiscono l'equazione di Eulero che governano la dinamica dei fluidi ideali detti anche inviscidi:

$$\begin{cases} \rho(\bar{f} - \bar{a}) = \nabla p \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v}) = 0 \end{cases}$$

Queste 4 equazioni scalari non sono, in realtà, sufficienti a risolvere i problemi di dinamica dei fluidi ideali, dal momento che le incognite del problema sono i 5 campi scalari rappresentati dalle tre componenti scalari del vettore velocità (v_x, v_y, v_z), dalla pressione p e dalla densità ρ. L'equazione mancante è costituita, ovviamente, dall'equazione di stato.

Teorema di Bernoulli

Supponiamo ora di avere un fluido ideale pesante e di sviluppare l'accelerazione rispetto alla terna intrinseca introdotta precedentemente. Se definiamo:

$$\bar{f} = -g\nabla\tilde{z} \qquad \bar{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{r}\hat{n}$$

L'equazione diventa:

$$\rho\bar{f} - \rho\bar{a} = \nabla p$$

$$-\rho g \nabla \tilde{z} - \rho \left(\frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right) = \nabla p$$

$$\nabla p + \rho g \nabla \tilde{z} = -\rho \left(\frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right)$$

Ipotizzando ora che il fluido sia incomprimibile e che dunque la densità sia costante e sia possibile definire quindi il peso specifico $\gamma = g\rho$, dividiamo tutto per questa grandezza:

$$(\nabla p + \rho g \nabla \tilde{z}) \frac{1}{\gamma} = -\rho \frac{1}{\gamma} \left(\frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right)$$

$$\frac{1}{\gamma} \nabla p + \frac{\rho g}{\gamma} \nabla \tilde{z} = -\rho \frac{1}{\gamma} \left(\frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right)$$

$$\gamma = g\rho \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{g\rho}$$

$$\frac{1}{\gamma} \nabla p + \frac{\rho g}{g\rho} \nabla \tilde{z} = -\rho \frac{1}{g\rho} \left(\frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right)$$

$$\frac{1}{\gamma} \nabla p + \nabla \tilde{z} = -\frac{1}{g} \left(\frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right)$$

$$\nabla \left(\frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right)$$

Proiettiamo ora questa equazione lungo le tre direzioni:

$$\boxed{\hat{t} = \hat{s}}$$

1. Direzione binormale: $\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = 0$
2. Direzione normale: $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} \frac{v^2}{r}$
3. Direzione tangenziale: $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} \frac{dv}{dt}$

Analizziamo meglio la direzione tangenziale:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} \left(v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} v \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

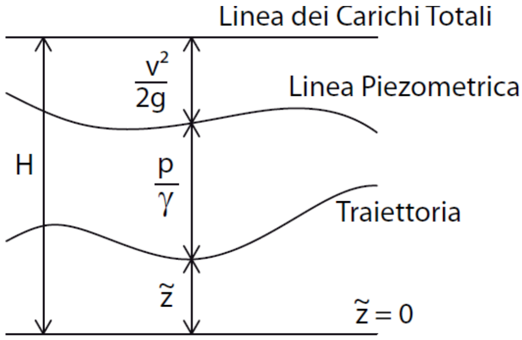
$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) + \frac{1}{g} v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}+\frac{v^2}{2g}\right)=-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Se il moto è stazionario la velocità è costante e quindi la derivata della velocità rispetto al tempo è nulla dunque si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}+\frac{v^2}{2g}\right)=0$$

Otteniamo così il trinomio di Bernoulli, noto anche come carico totale. Il teorema di Bernoulli afferma che lungo la traiettoria di una particella di fluido ideale, pesante, incomprimibile, in condizioni di moto permanente il carico totale rimane costante.
Il teorema di Bernoulli può anche essere interpretato energeticamente ed esprime quindi il principio di conservazione dell'energia meccanica:



$$\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}+\frac{v^2}{2g}\right)mg=0$$

$\frac{\mathrm{p}}{\gamma}$	energia potenziale dovuta alla pressione per unità di peso
$\tilde{z}$	energia potenziale gravitazionale per unità di peso
$\frac{v^2}{2g}$	energia cinetica per unità di peso
$\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}$	energia potenziale per unità di peso

Estensione alle correnti

Dal momento che nella pratica si incontrano spesso le correnti occorre estendere il teorema di Bernoulli ad esse.
Definiamo per prima cosa un tubo di flusso come un volume di spazio occupato da una particella di fluido in moto lungo la sua traiettoria. Consideriamo dunque la corrente come costituita da infiniti tubi di flusso, ciascuno dei quali avente aria trasversale infinitesima dA. Definiamo ora la potenza meccanica infinitesima di un tubo di flusso (ipotizzando che il fluido sia ideale, pesante, incomprimibile ed in condizioni di moto permanente e dunque valga il teorema di Bernoulli):

$$dP=\gamma Hv\,dA$$

Dal momento che si conserva la potenza meccanica infinitesima, si conserva anche la potenza meccanica totale:

$$P=\int dP=\int\gamma Hv\,dA=\gamma\int\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}+\frac{v^2}{2g}\right)v\,dA=cost$$

Nel caso in cui le traiettorie delle correnti siano quasi rettilinee e quindi si hanno correnti lineari dette anche gradualmente variate, la potenza meccanica può essere riscritta come segue:

$$P=\gamma\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}\right)Q+\frac{\gamma}{2g}\int_A v^3\,dA=\gamma\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}\right)Q+P_c=cost$$

$$P_c = \frac{\gamma}{2g}\int_A v^3 \, dA$$

dove P_c rappresenta la potenza cinetica posseduta dalla corrente e Q è la portata della corrente stessa. Per valutare la potenza cinetica occorre conosce la distribuzione delle velocità locali lungo la sezione trasversale al flusso. Nel caso delle correnti è opportuno utilizzare la velocità media V. Introduciamo quindi i il coefficiente di Coriolis detto anche Coefficiente di Ragguaglio della potenza cinetica:

$$\alpha = \frac{\int_A v^3 \, dA}{V^3 A}$$

Per i fluidi reali il coefficiente di Coriolis è pari a 1 perché in assenza di perdite energetiche l'energia iniziale si conserva. Per i fluidi reali invece il coefficiente di Coriolis è diverso da 1. Possiamo quindi riscrivere la potenza meccanica nel seguente modo:

$$P = \gamma\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \tilde{z}\right) Q + \frac{\gamma}{2g}\alpha V^3 A$$

e dividendo tutto per il peso specifico e la portata, entrambe costatanti, si ottiene la definizione del carico totale medio o energia meccanica media per unità di peso della corrente:

$$H_m = \frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \tilde{z} + \frac{\alpha V^2}{2g} = cost$$

Nel caso dei fluidi reali l'energia meccanica non si conserva ma diminuisce ne senso del moto trasformandosi in calore a causa delle cosiddette perdite energetiche; dunque per correnti gradualmente variate di fluidi reali incomprimibili, in condizioni di moto permanente, occorre effettuare la derivata parziale del carico totale medio rispetto alla coordinata s dello spostamento:

$$\frac{\partial H_m}{\partial s} = -J$$

otteniamo così la definizione della candente energetica media della corrente J