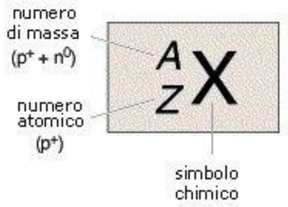
ELETTROSTATICA

Introduzione

Per le considerazioni che faremo possiamo affermare che la materia che ci circonda è formata da 3 costituenti elementari:

1. Protone = ha carica positiva
2. Neutrone = elettricamente neutro
3. Elettrone = ha carica negativa, è puntiforme cioè privo di struttura interna

Protone e neutrone hanno dimensione dell'ordine di grandezza pari a 10^{-15}cioè del femtometro, unità che in fisica nucleare prende il nome di fermi. La carica dell'elettrone è la più piccola carica osservata sperimentalmente e prende il nome di carica elementare. Tutte le particelle subatomiche hanno una carica che, in valore assoluto, è uguale oppure multiplo interno di quella dell'elettrone stesso; questo perché la carica è quantizzata. Protone, elettrone e neutrone si aggregano in atomi costituiti da un nucleo composto esclusivamente da protoni e neutroni. La composizione atomica è descritta da 2 numeri:



- Numero atomico Z = equivale al numero di protoni e descrive le proprietà elettriche dell'atomo
- Numero di massa A = equivale al numero di protoni e di neutroni

La materia costituita da atomi è generalmente neutra, con determinati metodi è però possibile caricarla elettricamente. In particolare con il processo di strofinio è possibile separare le cariche, attraverso dunque un agente meccanico, e trasferirle quindi da un corpo ad un altro. L'interazione tra le cariche prende il nome di forza elettrica. Corpi che si caricano per strofinio sono detti isolanti perché capaci di trattenere la carica; i corpi che invece non la trattengono sono chiamati conduttori. Il primo strumento costruito per rivelare e riconoscere lo stato di carica fu l'elettroscopio a foglie.

Secondo il principio di conservazione della carica elettrica *in un sistema elettricamente isolato la somma algebrica di tutte le cariche elettriche rimane costante nel tempo ovvero si conserva*.

Forza elettrostatica

La formulazione precisa della forza elettrostatica è dovuta a Coulomb grazie a una serie di misure sistematiche che svolse nel 1785 utilizzando la bilancia a torsione. Egli scoprì che la forza era direttamente proporzionale al prodotto delle cariche elettriche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

dove k dipende dalla scelta delle unità di misura e dal mezzo in cui le cariche sono immerse, mezzo che viene chiamato dielettrico. Se si è nel vuoto la k dipende dalla costante ε_0:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}8542 * 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}$$

C è il coulomb cioè l'unità di misura della carica elementare definito come la carica trasportata da una corrente di 1A in 1s.

Trattandosi di una forza, la legge di Coulomb può anche essere espressa in termini vettoriali; dove la direzione è quella della retta congiungente le due cariche puntiformi:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$$

Se siamo in presenza di un sistema di particelle che interagiscono tra loro è possibile conoscere la forza totale tramite il principio di sovrapposizione che afferma che *forze elettriche agenti su una carica q0 dovute alle cariche circostanti si sommano come vettori*:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_0}{{r_i}^2} \vec{u}_i = q_0 \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{{r_i}^2} \vec{u}_i$$

Parti-cella	Carica elettrica (C)	Carica relativa al protone	Massa (kg)	Massa (u)	Massa relativa al protone
elettrone (e)	$-1{,}621 \cdot 10^{-19}$	-1	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$	$5{,}486 \cdot 10^{-4}$ u	1/1836
protone (p)	$+1{,}621 \cdot 10^{-19}$	+1	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$	1,007 u	1
neutrone (n)	0	0	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$	1,009 u	≅1

Campo elettrico

Nel 1846 Faraday ipotizzò che le cariche, o le masse, riempissero lo spazio circostante con un'entità alla quale attribuì il nome di campo. Con il termine campo elettrostatico si intende la forza risultante elettrostatica che agisce su una carica di prova q_0 posta nel punto in cui si sta misurando il campo diviso per la carica q_0 stessa:

$$E = \frac{F}{q_0}$$

Nei casi concreti la carica di prova può perturbare la distribuzione originale, non potendo questa essere formata da cariche esattamente puntiformi, cioè prive di struttura. Da un punto di vista teorico la definizione risulterebbe essere più precisa se si facesse tendere a 0 il valore di q_0, così da far scomparire la perturbazione prodotta da q_0 stesso. In pratica però ciò non viene fatto perché q_0 è già molto piccola rispetto a q. Vettorialmente possiamo esprimere il campo come:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_i}{q_0} \vec{u}$$

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{{r_i}^2} \vec{u}_i$$

Se la carica q_i è positiva il campo per definizione è uscente, se invece è negativa risulta essere entrante. Così come per la forza, anche per il campo vale il principio di sovrapposizione quindi *se la distribuzione di carica è continua il campo che essa crea in un punto P può essere ottenuto dividendo la carica in elementini infinitesimi dq*. Il campo elettrostatico prodotto da dq in un punto P distante r' si scrive utilizzando le formule:

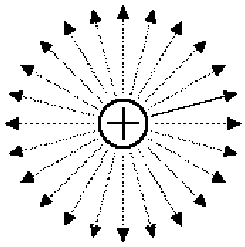
$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} \vec{u}'$$

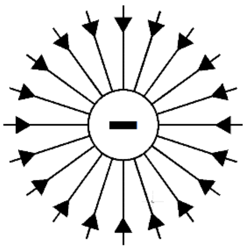
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r'^2} \vec{u}'$$

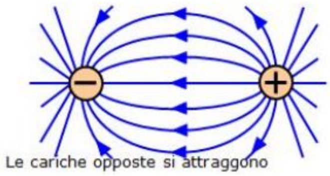
Linee di campo
Allo scopo di permettere un'immediata visualizzazione della distribuzione spaziale del campo elettrico, faraday introdusse il concetto di linea di campo cioè delle linee create partendo da una generica posizione e muovendosi per tratti infinitesimi successivi, ciascuno parallelo e concorde al campo elettrostatico in quel dato punto. Le linee di forza hanno dunque una serie di proprietà:

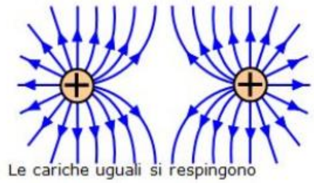
- Una linea di forza è sempre tangente e concorde al campo
- Le linee si addensano dove l'intensità del campo elettrostatico è maggiore
- Le linee non si incrociano mai in quanto in ogni punto il campo è definito univocamente e non può quindi avere direzioni distinte
- Le linee hanno origine dalle cariche positive e terminano nelle cariche negative; qualora ci fossero solo cariche di uno stesso segno le linee si chiudono all'infinito

Un campo elettrostatico uniforme è rappresentano da linee parallele, che indicano la costanza di direzione e verso, ed equidistanti che indicano invece la costanza del modulo.





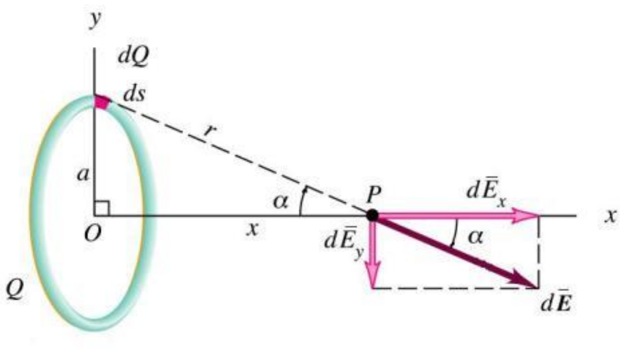




Esempi di calcolo del campo elettrostatico

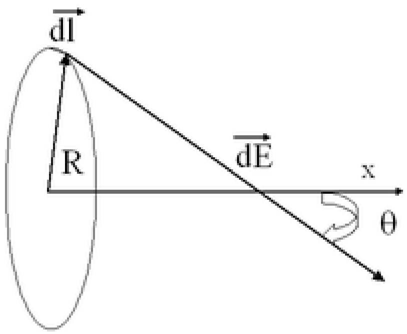
1. <u>Campo elettrostatico di un anello carico</u>

Definiamo una densità di carica lineare λ:	$\lambda = \dfrac{q}{2\pi R}$
Definiamo un elementino infinitesimo di carica:	$dq = \lambda\, dl$
Il campo negli elementini dell'anello diametralmente opposti si elide quindi bisogna calcolarlo solo nei punti dell'asse. Scriviamo l'elementino infinitesimo:	$dE = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\vec{u} = \dfrac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\vartheta$
Calcoliamo il campo totale integrando:	$E = \int_0^l dE = \int_0^l \dfrac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\vartheta = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\vartheta \int_0^l dl$
$E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$	



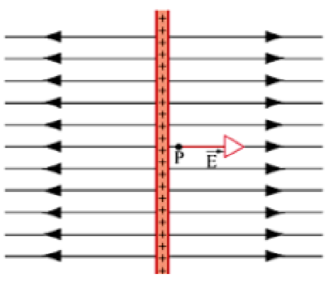
2. <u>Campo elettrostatico di un disco carico</u>

Definiamo una densità di carica superficiale σ:	$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$
Definiamo un elementino infinitesimo di carica:	$dq = \sigma\, d\Sigma$
Isoliamo idealmente una corona circolare compresa tra r e r+dr, assimilabile ad un anello, di superficie:	$d\Sigma = 2\pi r\, dr$
Questa corono avrà un'elementino infinitesimo di carica pari a:	$dq = \sigma\, d\Sigma = \sigma 2\pi r\, dr$
La distribuzione anulare di carica produce sull'asse, a distanza x dal centro, un campo elettrico infinitesimo:	$dE = \frac{\sigma x r\, dr}{2\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}}$
Calcoliamo il campo totale integrando:	$E = \int_0^R dE = \int_0^R \frac{\sigma x r\, dr}{2\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}}$
$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{\lvert x\rvert}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$	



3. <u>Campo elettrostatico di due piani indefiniti carichi</u>

I piani hanno una densità superficiale pari a σ	σ
Ogni piano genera un campo elettrico:	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



Moto di una particella carica

Supponiamo di mettere una carica q di piccole dimensioni, puntiforme, in uno spazio in cui è presente il campo elettrico. Questa sarà sottoposta alla forza elettrostatica e alle leggi della dinamica di Newton in condizione non relativistiche. Se il campo è uniforme e la particella ha un'accelerazione costante è possibile descrivere il moto con queste formule:

$$qE = ma$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{q}{m}E$$

$$a(t) = \frac{q}{m}E$$

$$v(t) = \frac{q}{m}Et$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{2q}{m}Ex}$$

$$t = \sqrt{\frac{2mx}{qE}}$$

$$x(t) = \frac{q}{m}Et^2$$

Lavoro

In generale il lavoro per un percorso chiuso è diverso da 0 e può essere calcolato tramite la formula:

$$W = \oint_c F\,ds = q_0 \oint_c E\,ds = q_0\mathcal{E}$$

dove $\mathcal{E}$ esprime il rapporto tra il lavoro computo sulla carica e la carica stessa per lo spostamento c. Questo valore si definisce forza elettromotrice fem. Tale valore non è una forza come suggerisce il nome, generalmente è diversa da 0 e dipende dalle caratteristiche del campo e del percorso scelto, non dalla carica q_0. La fem è uguale alla tensione elettrica tra due punti A, B relativi a uno specifico percorso. Quando il generatore di un circuito è ideale e quanto quindi la resistenza interna del generatore è trascurabile.
Il lavoro lungo un qualsiasi percorso chiudo è nullo e quindi ne deriva che la circuitazione di una forza conservativa è nulla: il campo elettrostatico è dunque conservativo perché non dipende dal percorso effettivamente seguito.

Potenziale elettrostatico

Si definisce potenziale elettrico, e si indica con *V*, il lavoro che occorre compiere per portare una carica unitaria da un punto qualsiasi del campo elettrico all'infinito (un punto infinitamente lontano esterno al campo). Il potenziale elettrico varia da punto a punto in un campo: a punti diversi dello spazio corrispondono potenziali diversi. Il lavoro da compiere per portare una carica unitaria da un punto *A* (potenziale elettrico *VA*) a un punto *B* (potenziale elettrico *VB*), entrambi interni al campo, sarà dato dalla differenza di potenziale (Δ) tra i due punti del campo:

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\,ds$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$W_{AB} = -q_0(V_B - V_A) = -q_0\Delta V$$

Energia potenziale elettrostatica

Ricordando che ad ogni forza conservativa è associata una certa energia potenziale e che il lavoro della forza conservativa è pari all'opposto della variazione della corrispondente energia potenziale possiamo scrivere l'espressione dell'energia potenziale elettrostatica:

$$W_{AB} = -\Delta U_e$$

$$U_e = q_0\Delta V = \sum_1^n \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_0}{r}$$

Il lavoro quindi di una forza elettrica può sempre essere espresso attraverso l'integrale di linea del campo elettrico lungo il percorso seguito dalla carica e in generale dipende dal percorso, non è invece così per una forza elettrostatica. Infatti per un qualsiasi percorso chiuso nella regione in cui è definito un campo elettrostatico vale che:

$$\mathcal{E} = \oint E\, ds = 0$$

$$W = q_0\mathcal{E}$$

Esiste una relazione tra il campo elettrostatico e il potenziale: il campo è uguale in ogni punto al gradiente del potenziale elettrostatico cambiato di segno:

$$E = -\nabla V$$

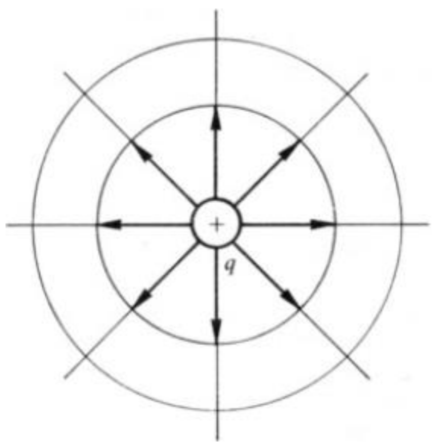
Secondo il teorema del gradiente vale:

$$V_B - V_A = \int_A^B \nabla V\, ds$$

Superfici equipotenziali

Ora che abbiamo introdotto il concetto di potenziale elettrostatico possiamo parlare di superfici equipotenziali. Con questo termine s'intende una superficie dello spazio tridimensionale nei cui punto il potenziale elettrostatico ha lo stesso valore. La struttura del campo quindi può essere visivamente rappresentata, oltre che dalle linee di forza, anche dall'andamento del potenziale elettrostatico. Le superfici equipotenziali hanno quindi 2 caratteristiche:

1. Per un punto passa una e una sola superficie equipotenziale: dipende dal fatto che il potenziale elettrostatico è una funzione univoca
2. Le linee di forza sono in ogni punto ortogonali alla superficie equipotenziale: è conseguenza del fatto che il campo elettrostatico non può avere una componente tangente ad una superficie equipotenziale



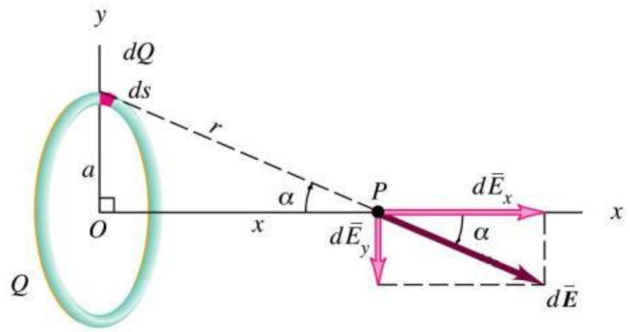
Nel caso di una carica puntiforme le superfici equipotenziali sono superfici sferiche concentriche con centro nella carica perché hanno come equazione:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Esempi di calcolo del potenziale

1. Potenziale elettrostatico di un anello carico

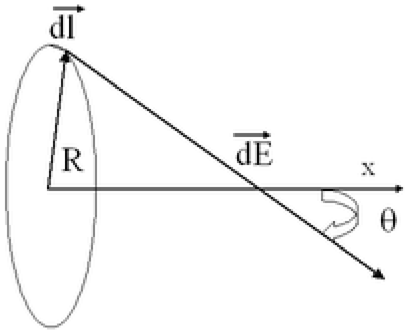
Definiamo una densità di carica lineare λ:	$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$
Definiamo un elementino infinitesimo di carica:	$dq = \lambda\, dl$
Definiamo la distanza tra l'elementino infinitesimo di carica e un punto generico P dell'asse:	$r = \sqrt{R^2 + x^2}$
Calcoliamo il potenziale totale integrando:	$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int dl = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} 2\pi R$
$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$	



2. Potenziale elettrostatico di un disco carico

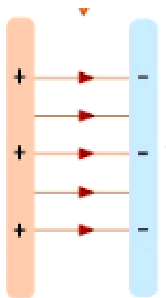
Definiamo una densità di carica superficiale σ:	$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$
Definiamo un elementino infinitesimo di carica:	$dq = \sigma\, d\Sigma$
Isoliamo idealmente una corona circolare compresa tra r e r+dr, assimilabile ad un anello, di superficie:	$d\Sigma = 2\pi r\, dr$
Questa corono avrà un'elementino infinitesimo di carica pari a:	$dq = \sigma\, d\Sigma = \sigma 2\pi r\, dr$
Calcoliamo il potenziale infinitesimo:	$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma r\, dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}}$
Calcoliamo il potenziale totale integrando:	$V = \int_\Sigma dV = \int_0^R \frac{\sigma r\, dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)$$



3. Potenziale elettrostatico tra due piani indefiniti carichi

I piani hanno una densità superficiale pari a σ	$\pm\sigma$
Ogni piano genera un potenziale:	$V = V_1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x - x_1)$



4. Potenziale elettrostatico di una sfera uniformemente carica:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho\,\frac{dv}{r}$$

5. Potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Legge di Gauss

Considerando una regione dove è definito il campo E, orientata lungo la direzione normale u_n, si definisce flusso del campo E attraverso la superficie dΣ la quantità scalare:

$$d\Phi = \vec{E}\,\vec{u_u}d\Sigma = E\,\cos\vartheta\,d\Sigma = E_n d\Sigma$$

Se la superfice è finita, Σ, il flusso si ottiene suddividendo questa stessa superficie in elementini infinitesimi di superficie e calcolando per ciascuno di essi il flusso infinitesimo, sommando poi tutti i contributi. In generale dunque sarà sufficiente calcolare l'integrale di superficie:

$$\phi(E) = \oint_\Sigma d\Phi = \oint_\Sigma \vec{E}\,\vec{u_u}d\Sigma$$

Se la componente normale del campo è positiva, tutti i contributi sono positivi e dunque il flusso è uscente, viceversa, se risulta essere negativo tutti i contributi sono negativi e il campo è entrante. Se il flusso entrate eguaglia quello uscente allora il flusso totale risulta essere nullo. Possiamo ora introdurre la legge di Gauss, valida solo se la forza tra le due cariche elementari è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le stesse. La legge di Gauss stabilisce che il flusso del campo elettrostatico prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie, divise per ε_0:

$$\phi(E) = \oint_{\Sigma} \vec{E}\,\overrightarrow{u_u} d\Sigma = \frac{(\sum_i q_i)_{interne}}{\varepsilon_0}$$

Questa legge vale indipendentemente da come sono distribuite le cariche all'interno della superficie. È possibile dimostrare questa legge a partire da un esempio particolare oppure da un caso generale:

- Esempio particolare: carica puntiforme

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\phi(E) = \oint_{\Sigma} \vec{E}\,\overrightarrow{u_u} d\Sigma = \oint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\overrightarrow{u_r}\,\overrightarrow{u_n} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oint d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} * 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- Caso generale:

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{u_r}\,\overrightarrow{u_n}}{r^2}\, d\Sigma$$

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u_r}\,\overrightarrow{u_n} d\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_{\Sigma} \frac{\overrightarrow{u_r}\,\overrightarrow{u_n}}{r^2}\, d\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_{\Sigma} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

In generale dunque il flusso del campo elettrostatico E di una carica puntiforme q dipende solo dall'angolo solido e non dalla superficie né dalla sua distanza con la carica. Riassumendo: il flusso totale attraverso una superficie chiusa del campo elettrostatico di una carica puntiforme vale q/ε_0 se la carica è interna e 0 se la carica è esterna. Nel caso più generale in cui il campo sua generato da una distribuzione continua di cariche la formula diviene:

$$\phi(E) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int dq$$

La legge di Gauss è uno strumento molto efficace per determinare il campo elettrostatico nel caso in cui la distribuzione di carica che genera il campo presenti un elevato grado di simmetria come quella sferica, cilindrica, piana o radiale.

Esempi di calcolo di campo tramite Gauss

1. <u>Distribuzione sferica superficiale</u>
   - r > R: simmetria radiale

$$\phi(E) = \oint_{\Sigma} \vec{E}\,\overrightarrow{u_r}\,\overrightarrow{u_n} d\Sigma = \vec{E} \oint d\Sigma = \vec{E}\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

- r < R: simmetria radiale

$$\phi(E) = 0$$

$$\overrightarrow{E} = 0$$

2. <u>Sfera uniformemente carica</u>
   - r > R: simmetria sferica

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\overrightarrow{u_r} = \frac{\rho R^3}{3r^2\varepsilon_0}$$

$$q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

   - r < R: simmetria sferica e radiale

$$\phi(E) = 4\pi R^2 \vec{E} = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

$$q' = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = q\frac{r^3}{R^3}$$

$$\vec{E} = \frac{q'}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

3. <u>Cilindro uniformemente carico</u>
   - r > R: simmetria cilindrica

$$\phi(E)_{attraverso\ le\ basi} = 0$$

$$\phi(E) = \vec{E}\Sigma = 2\pi r h E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\lambda = \rho\pi R^2 = \frac{q}{h}$$

$$q = \int \rho\, d\tau = \rho\pi R^2 h = \lambda h$$

$\phi(E) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho\pi R^2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

   - r < R

$$\phi(E) = \begin{cases} 2\pi r h E \\ \dfrac{h\rho\pi r^2}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\rho\pi r$$

4. Piano indefinito

$$q = \sigma\Sigma$$

$$\phi(E) = 2E\Sigma = \frac{\sigma\Sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Divergenza campo elettrostatico
Il teorema della divergenza afferma che il flusso di un campo vettoriale come ad esempio il campo elettrico E, attraverso una superficie chiusa è uguale all'integrale della divergenza del campo vettoriale esteso al volume racchiuso dalla superficie:

$$\oint_\Sigma \vec{E}\,\overrightarrow{u_n} d\Sigma = \int_\tau \nabla E \; d\tau$$

In base a questo teorema è possibile riscrivere la legge di Gauss:

$$\phi(E) = \int_\tau \nabla E \; d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\tau \rho \; d\tau$$

$$\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

dove ρ è la densità di carica all'interno del volume τ: $dq = \rho \; d\tau$
La divergenza è dunque una funzione matematica che opera sui vettori e produce uno scalare:

$$div\,\vec{E} = \lim_{V\to 0}\frac{\phi}{V}$$

Vediamo ora come ricavare la divergenza in coordinate cartesiane:

$$d\Phi_1 = \vec{E}\overrightarrow{u_x}\,dy\,dz = \overrightarrow{E_x}\,dy\,dz$$

$$E_x|_1 = E_x(0) + \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

$$d\Phi_1 = \left(E_x(0) + \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz$$

$$d\Phi_2 = -E_x|_2 dy\,dz = -\left(E_x(0) - \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz$$

$$E_x|_2 = E_x(0) + \frac{\partial E_x}{\partial x}\left(-\frac{dx}{2}\right)$$

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

$$d\Phi_{tot} = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz$$

La divergenza può anche esser espressa tramite l'equazione di Poisson che lega il potenziale elettrostatico alla densità di carica e sfrutta l'operatore scalare $\nabla * \nabla = \nabla^2$ noto come operatore di Laplace o laplaciano:

$$\nabla * \nabla V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Nello spazio vuoto dove $\rho = 0$ l'equazione di Poisson prende il nome di equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Conservatività del campo elettrostatico

Il flusso di un vettore, come il rotore attraverso la superficie vale:

$$d\Phi = \nabla\, x\, E\, u_n d\Sigma = |\nabla\, x\, E| \cos\vartheta\, d\Sigma$$

Applicando ciò al campo elettrostatico si ha che il primo membro è sempre nullo in quanto il campo elettrico E è conservativo, il secondo membro invece può essere nullo se il rotore di E è nullo. Il campo elettrostatico è dunque conservativo e irrotazionale cioè ha sempre rotore nullo:

$$\nabla\, x\, E = 0$$

$$\nabla\, x\, E = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{dE_z}{dy} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) u_x + \left(\frac{dE_x}{dz} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) u_y + \left(\frac{dE_y}{dx} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) u_z$$

Il teorema di Stokes afferma che la circuitazione di un campo vettoriale, E nel nostro caso, lungo una linea chiusa C è eguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie Σ avente per contorno C:

$$\oint E\, ds = \int_{\Sigma} \nabla\, x\, E\, u_n\, d\,\Sigma$$

CONDUTTORI

Conduttori in equilibrio

Come abbiamo già citato in prece3denza esistono materiali conduttori e materiali isolanti. Un conduttore elettrico è un materiale in grado di far scorrere corrente al suo interno. All'interno di un conduttore è dunque possibile il moto, e quindi lo spostamento, di cariche elettriche di entrambi i segni. Nei fenomeni elettrostatici però le cariche sono fisse e questa condizione richiede che all'interno di un conduttore il campo debba essere nullo. Tale condizione ha le seguenti conseguenze che caratterizzano un conduttore in equilibrio:

1. L'eccesso di carica elettrica in un conduttore può stare solo sulla superficie del conduttore: questa proprietà implica che, se il campo E è nullo, è nullo anche il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa tracciata all'interno del conduttore e quindi, secondo la legge di Gauss, all'interno del conduttore stesso non ci sono cariche. Ne consegue che l'eccesso di carica si distribuisce sulla superficie del conduttore con densità superficiale:

$$\sigma = \frac{dq}{d\Sigma}$$

2. Il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore: presi infatti due punti qualsiasi:

$$V(P_1) - V(P_2) = -\int_{P_1}^{P_2} E\, ds = 0$$

$$V(P_1) = V(P_2) = V_0$$

   Tale risultato continua a essere valido anche se uno dei due punti sta sulla superficie del conduttore, che risulta quindi essere una superficie equipotenziale.

3. Il campo elettrostatico in un punto nelle vicinanze della superficie del conduttore e perpendicolare ad essa ha intensità pari a:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

   Il valore di E si può ricavare applicando la legge di Gauss ad un cilindro retto di basi $d\Sigma$ e superfici laterali di area trascurabile rispetto alle basi stesse, una delle quali contenuta all'interno del conduttore, in cui E=0, e l'altra in prossimità immediata del conduttore esterno:

$$\oint_{\Sigma} \overrightarrow{E}\,\overrightarrow{u_n} d\Sigma = \mathrm{E}\ \mathrm{d}\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma d\Sigma$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \overrightarrow{u_n}$$

   Questo risultato è noto come teorema di Coulomb. Il verso è uscente se la densità è positiva ed entrante se negativa. Il modulo del campo elettrostatico è maggiore dove σ è maggiore e σ è maggiore dove il raggio di curvatura della superficie è minore, fatto che si verifica ad esempio in zone "appuntite".

Un conduttore carico lontano da altri conduttori ha dunque una distribuzione di carica superficiale tale che il campo elettrostatico all'interno sia nullo, qualunque sia la fora del conduttore stesso. La carica deve avere lo stesso segno, positivo o negativo, ovunque sulla superficie.

Avvicinando un conduttore, carico o scarico, ad un altro corpo carico e quindi introducendo il conduttore stesso in un campo elettrico esterno, il campo elettrostatico interno non sarebbe più nullo ma dipenderebbe da E, il campo esterno. Si ha perciò un movimento di elettroni che si spostano proprio per l'azione del campo elettrico esterno e si accumulano in una zona della superfice, lasciando sul resto della superficie stessa un eccesso di carica positiva; tra queste due

zone si crea un campo elettrostatico indotto E_i, che contrasta il movimento degli elettroni. Si raggiunge l'equilibrio quando la somma tra il campo esterno e quello indotto è pari a 0 in tutto l'interno del conduttore. Si ha così una distribuzione di carica elettrica indotta. In totale però la carica elettrica del conduttore rimane la stessa perché la carica elettrica indotta è la somma algebrica dei due contributi uguali ed opposti.
Se posiamo a contatto due o più conduttore, ad esempio, collegandoli con un filo conduttore si costituisce un unico corpo conduttore in equilibrio e vale ovunque la condizione di campo nullo e potenziale costante.

Conduttore cavo e schermo elettrostatico

Prendendo in considerazione un conduttore cavo all'interno del quale non sono presenti cariche elettriche, si può osservare che nella massa del conduttore il campo elettrico è nullo. È dunque nullo anche il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa che racchiude la cavità. Ne segue, per le leggi di Gauss, che all'interno di questa superficie non ci sono cariche e dunque anche sulle pareti della cavità la carica è nulla. Inoltre sulle pareti non è possibile una separazione della carica: E è infatti conservativo. Se, per assurdo, sulle pareti fosse presenti due distribuzioni di carica di segno opposto ci sarebbero nella cavità linee di forza, uscenti dalle cariche positive ed entrati in quelle negative e quindi la circuitazione di E lungo una linea chiusa sarebbe diversa da 0 e ciò è in contrasto con il campo conservativo stesso. Dunque sulle pareti della cavità non possono esserci cariche elettriche. In conclusione:

- La carica di un conduttore in equilibrio elettrostatico si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche in presenza di una o più cavità all'interno del conduttore
- Il campo elettrostatico è nullo e il potenziale elettrostatico è costante in ogni punto interno alla superficie del conduttore, anche in presenza di cavità

La situazione descritta all'interno della cavità di un conduttore cavo dipende dalla carica e quindi dal potenziale del conduttore: all'interno della cavità non si misura mai tra due punti una differenza di potenziale diversa da 0. Il punto di riferimento per il potenziale elettrostatico è la parete della cavità, rispetto a cui la differenza di potenziale è nullo.
Considerando ora un nuovo conduttore cavo, all'interno del quale introduciamo un altro conduttore carico nella cavità e isolato dal primo. Il primo conduttore è isolato e privo di carica. In condizioni di equilibrio se il conduttore interno ha sulla superficie esterna una carica q, una carica -q risulta essere distribuita sulla superficie interna del conduttore esterno mentre una carica +q si distribuisce sulla superficie esterna dello stesso. È possibile spiegare ciò tramite la legge di Gauss: attraverso una superficie chiusa Σ interna al conduttore esterno e contenente la cavità, il flusso di E è nullo in quanto risulta nullo il campo stesso, di conseguenza all'interno di Σ non c'è carica e quindi se nel conduttore interno c'è +q, su quello esterno dovrà esserci necessariamente -q. Questo fenomeno è detto di induzione completa: essendo la carica q completamente contenuta all'interno di una cavità chiusa.
Fino a che lo spazio interno e lo spazio esterno non sono comunicante il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra spazio interno e spazio esterno.
Il campo elettrostatico all'interno della cavità dipende sia dalla sua forma geometria che dalla posizione e dal valore della carica in essa indotta, non dipende invece da variazioni della distribuzione della carica sulla superficie esterna o dalla presenza di campi elettrostatici esterni. Analogamente, la distribuzione della carica sulla superficie esterna non dipende dalla posizione della carica q posta nella cavità. Il conduttore cavo è uno schermo elettrostatico: lo spostamento di cariche entro la cavità non modifica il campo elettrico esterno e lo spostamento di cariche esterno non modifica il campo nella cavità.

Condensatori

Un sistema come quello sopracitato costituito da due conduttori tra i quali c'è un'induzione completa prende il nome di condensatore: i due conduttori invece sono detti armature del condensatore.
Consideriamo il sistema costituito da un conduttore sferico posto al centro di un altro conduttore sferico cavo è possibile calcolare la differenza di potenziale tra i due conduttori:

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = C$$

Il rapporto tra carica e differenza di potenziale dei due conduttori sferici e concentrici è indipendente dalla carica ed è determinato esclusivamente dalla geometria del sistema e dal mezzo contenuto nell'intercapedine tra i due conduttori. Si definisce dunque capacità del condensatore il rapporto tra la carica presente sulle due armature e la differenza di potenziale tra le stesse:

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

Un condensatore viene essenzialmente usato come deposito di carica: pur essendo la carica totale nulla, essa è separata nella quantità +q e -q. Tramite opportuni collegamenti conduttivi esterni è possibile far fluire la carica negativa, cioè gli elettroni, da un'armatura all'altra, generando una corrente elettrica che scarica il condensatore. I collegamenti possono generalmente essere di due tipi:

1. Condensatori in parallelo = i componenti sono collegati ad una coppia di conduttori in modo che la tensione elettrica sia applicata a tutti quanti allo stesso modo. Due condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore la cui capacità è data dalla somma della capacità dei singoli componenti. La capacità è dunque sempre maggiore di quella di ciascun componente:

$$q_1 = C_1 V$$

$$q_2 = C_2 V$$

$$q_{tot} = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)V$$

$$C_{equivalente} = \frac{q}{V} = \frac{(C_1 + C_2)V}{V} = (C_1 + C_2)$$

$$C_{equivalente} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

2. Condensatori in serie = i componenti sono collegati in modo da formare un percorso unico per la corrente elettrica che li attraversa. In un sistema di condensatori in serie la carica risulta essere la stessa su ciascuno, l'inverso della capacità equivalente è somma degli inversi delle singole capacità:

$$V_C - V_B = \frac{q}{C_1}$$

$$V_B - V_A = \frac{q}{C_2}$$

$$V = V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{q}{C_{equivalente}}$$

$$\frac{1}{C_{equivalente}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{equivalente} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Esempi di calcolo della capacità

1. Capacità di un condensatore sferico

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

2. Capacità di un condensatore cilindrico

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

3. Capacità di un condensatore piano

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}$$

Energia del campo elettrostatico

Il processo di carica di un condensatore consiste in una separazione di cariche e richiede un determinato lavoro che, essendo il campo elettrostatico conservativo, dipende soltanto dallo stato iniziale e dallo stato finale e quindi non dalla modalità con cui viene il processo.
Per eseguire il calcolo possiamo immaginare che il processo di carica carica di un condensatore avvenga sottraendo, tramite un agente esterno, una carica dq dall'armatura negativa e portandola sulla quella positiva: si stabilisce così tra le due armature una differenza di potenziale V e la carica totale è in ogni istante nulla. Se in una fase intermedia del processo la differenza di potenziale è V', poiché è già stata trasferita la carica q'=CV', il lavoro per spostare l'ulteriore carica dq':

$$dW = V'dq' = \frac{q'}{C}dq'$$

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' = \frac{q^2}{2C}$$

Il lavoro complessivo per effettuare la separazione delle cariche dipende solo dalla carica trasportata e dalla capacità del condensatore. Non contiene informazioni sul processo effettivo. Questo lavoro che si oppone a un accumulo di cariche dello stesso segno, viene immagazzinando nel sistema sotto forma di energia potenziale elettrostatica:

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

Questa espressione lega l'energia alle cariche; è tuttavia possibile trovare un'espressione alternativa dell'energia, legata al campo elettrostatico prodotto dal sistema di cariche, piuttosto che due sorgenti del corpo stesso. Si definisce quindi densità di energia elettrostatica l'energia elettrostatica per unità di volume:

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$dU_e = u_e\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, d\tau$$

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, d\tau$$

Conduzione elettrica

Se si mettono a contatto due conduttori isolati a potenziali diversi si raggiunge una conduzione di equilibrio in cui entrambi i conduttori si portano allo stesso potenziale: questo perché un certo numero di elettroni passa dal conduttore a potenziale minore a quello a potenziale maggiore, sotto l'azione del campo elettrico dovuto alla differenza di potenziale. Questo moto ordinato di elettroni in una certa direzione costituisce una corrente elettrica e il fenomeno è un esempio di conduzione elettrica. In questo caso però la corrente dura soltanto un tempo molto breve; è dunque necessario un dispositivo capace di mantenere una differenza di potenziale e, quindi, un campo elettrico tra i due conduttori. Un dispositivo con queste caratteristiche prende il nome di generatore di forza elettromotrice. Il primo fu inventano nel 1800 da Volt. In questi dispositivi il lavoro necessario per mantenere un moto ordinato di cariche, in un circuito chiuso, è ottenuto trasformando energia chimica in elettrica. Oltre ai materiali conduttori esistono altri tipi di materiali:

- Semiconduttori = materiali solidi isolanti nei quali, tramite opportuni trattamenti, è possibile mantenere una corrente elettrica se viene applicato un ΔV
- Superconduttori = materiali in cui una corrente elettrica può essere mantenuta per tempi estremamente lunghi senza spesa di lavoro

CORRENTE ELETTRICA

Corrente elettrica

I portatori di cariche, in un campo elettrico E, si muovono sotto l'azione della forza elettrica, acquistando una velocità V_d, detta velocità di deriva. Tale moto dà origine a una corrente elettrica. Si definisce dunque corrente il movimento di cariche. Nello specifico, considerando la superficie S, facente parte di un qualsiasi conduttore, si definisce intensità di corrente media il numero di cariche che attraversano la superficie S in funzione del tempo:

$$< i >= \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Se si fa variare questo intervallo di tempo facendolo tendere a 0 si parla di intensità di corrente istantanea:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

$$q = \int_{\Delta t} i(t)dt$$

Considerando ora due superficie S e S', appartenenti a un conduttore, è possibile identificare una figura geometrica nota cioè un cilindro. Tale cilindro sarà caratterizzato ovviamente, da due basi e un'altezza. A partire dall'analisi di questa figura geometrica è possibile introdurre il concetto di densità di corrente e riformulare poi la definizione di intensità di corrente. Notando che le cariche si muovono tramite una velocità v e la componente normale di questa velocità è perpendicolare a S:

$$base = S$$

$$altezza = \ v_n dt$$

$$Volume\ cilindro = S * v_n dt$$

$$N = n°\ di\ portatori\ di\ carica\ per\ unità\ di\ volume$$

$$v_n = \vec{v}\vec{n}$$

$$dQ = qN(Sv_n dt)$$

$$i = \frac{dQ}{dt} = qNSv_n = qNS\vec{v}\vec{n}$$

$$j = qN\vec{v}$$

$$i = j\vec{n}S = \int_S j\vec{n}\, ds$$

Con il termine intensità di corrente si definisce la corrente che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione del moto delle cariche. Convenzionalmente si assume come verso della corrente quello del moto delle cariche positive, ovvero quello che va dai punti a potenziale maggiore ai punti a potenziale minore.
Come è facile intuire la corrente può variare nel tempo; se ciò non accade e quindi rimane costante nel tempo, la corrente è detta stazionaria. In tali condizioni l'intensità di corrente è costante attraverso ogni sezione del conduttore.
Conoscendo una qualsiasi superficie Σ, ortogonale a j e, sapendo che j è costante in ogni punto, si possono applicare le seguenti formule:

$$i = j\Sigma$$

Legge di Ohm
In regime stazionario, in un conduttore sottoposto a una differenza di potenziale si stabilisce che la densità di corrente j è legata linearmente al campo elettrico tramite una grandezza σ, caratteristico del conduttore e noto come conduttività elettrica, dalla seguente relazione:

$$j = \sigma E$$

Questa legge è nota come legge di Ohm o legge della conduttività elettrica. Essa definisce dunque il campo vettoriale j, le cui linee sono parallele e concordi alle linee del campo vettoriale E che dà origine alla corrente. σ descrive l'influenza del reticolo cristallino del solido con il quale gli elettroni di conduzione, nel loro moto, interagiscono tramite urti. La legge di Ohm sopra descritta, può essere descritta come:

$$E = \frac{1}{\sigma} j = \rho j$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

Il valore ρ è noto come resistività del conduttore. Minore è la resistività, maggiore è la densità di corrente che può circolare in un conduttore a parità di campo elettrico. La resistività è una funzione crescente della temperatura, infatti diminuisce con l'aumentare della temperatura secondo la relazione:

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(t - t_0)]$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho_{20}} \frac{\Delta\rho}{\Delta t}$$

Applicando la legge di Ohm ad un conduttore metallico cilindrico di lunghezza h e sezione Σ, si ha ai capi del conduttore stesso una differenza di potenziale, creata da un generatore di forza elettromotrice. Essendo in regime stazionario, l'intensità di corrente ha lo stesso valore attraverso una qualsiasi sezione del conduttore ed è legato al campo elettrico E:

$$j = \frac{i}{\Sigma}$$

$$E = \rho j = \frac{\rho}{\Sigma} i$$

$$V = V_A - V_B = \int_A^B E\, ds = Eh$$

$$V = \frac{\rho}{\Sigma} ih = \frac{\rho h}{\Sigma} i$$

$$R = \frac{\rho h}{\Sigma}$$

$$V = Ri$$

Se invece la sezione del conduttore è variabile la resistenza:

$$R = \int_A^B \frac{\rho}{\Sigma}\, dh$$

Pertanto in regime stazionario il rapporto tra la differenza di potenziale applicato ai capi del conduttore metallico e l'intensità di corrente che a seguito di ciò lo attraversa è pari a una grandezza detta resistenza del conduttore, che dipende solo dalla natura del conduttore e dalle sue dimensioni.

Potenza, lavoro ed effetto Joule

Analizzando una carica dq che si muove attraverso una differenza di potenziale è possibile osservare che per questo spostamento, viene compiuto dal campo elettrico agente un certo lavoro e dunque viene spesa della potenza elettrica:

$$P = \frac{dW}{dt} = Vi = Ri\, i = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$$

Il passaggio di corrente attraverso un conduttore metallico per un certo tempo t comporta dunque un lavoro:

$$W = \int_0^t P\, dt = \int_0^t Ri^2\, dt$$

Se la corrente risulta essere costante nel tempo, l'espressione del lavoro si riduce a:

$$W = Ri^2 t$$

Questo lavoro è necessario per vincere la resistenza opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni e, da un punto di vista termodinamico, esso viene assorbito dal conduttore la cui energia interna aumenta; di conseguenza aumenterà anche la temperatura del conduttore stesso. L'effetto di riscaldamento di un conduttore percorso da corrente si chiama effetto Joule.

Modello classico della conduzione elettrica: modello di Drude

Un modello classico della conduzione elettrica nei metalli fu proposto per la prima volta nel 1900 da Drude e sviluppato successivamente da Lorentz nel 1906. In questo modello si suppone che gli ioni del reticolo cristallino siano fissi e che gli elettroni si muovano attraverso il reticolo in modo completamente disordinato. Nel loro moto gli elettroni subiscono continue interazioni con gli ioni, che chiamiamo urti: tra un urto e il successivo il moto è libero e la traiettoria rettilinea. La traiettoria di ciascuno elettrone è costituita da una successione di segmenti rettilinei di lunghezza variabile. L'insieme delle traiettorie è dunque completamente casuale e non si ha un flusso netto di cariche, una corrente, in alcuna direzione. È possibile definire un tempo medio τ e un cammino libero medio l tra due urti successivi legati dalla relazione:

$$\tau = \frac{l}{V}$$

Quando si applica un campo elettrico, ciascun elettrone acquista un'accelerazione opposta al campo stesso e i tratti rettilinei tra i due urti diventano archi di parabola. Alla distribuzione casuale e isotropa delle velocità si sovrappone una velocità v_d di deriva. Il tempo medio τ tra due urti consecutivi non cambia perché la velocità di deriva è piccola rispetto alla velocità degli elettroni stessi. Dopo ogni urto la distribuzione di velocità continuerà ad essere casuale, quindi per effetto di E ciascun elettrone acquista una velocità di deriva nella direzione del campo elettrico, che è proporzionale al campo stesso:

$$v_d = -\frac{e\tau}{m}E$$

L'elettrone, nel tempo τ, acquista una quantità di moto che risulta essere pari all'impulso della forza. Tale quantità di moto viene ceduta allo ione del reticolo cristallino nell'urto successivo e riacquistata dopo τ:

$$mv_d = -e\tau E$$

A questo moto ordinato consegue una densità di corrente pari a:

$$j = -nev_d = \frac{ne^2\tau}{m}E$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$$j = \sigma E$$

Dove σ è la conduttività. Malgrado questo modello sia servito a giustificare la legge di Ohm, verificato sperimentalmente, esso non è adeguato a descrivere correttamente tutte le proprietà dei conduttori. Infatti tale modello, ad esempio, non tiene conto di una serie di difetti che caratterizzano il reticolo cristallino reale come vacanza e siti interstiziali. In realtà dunque la resistenza non deriva dall'interazione con il reticolo cristallino quanto, piuttosto, dalla presenza di questi difetti.

Resistori

I conduttori caratterizzati da un determinato valore della resistenza vengono detti resistori. Nei resistori è sempre indicato anche il valore massimo della potenza che può essere in essi dissipata senza causarne alterazioni irreversibili. I resistori possono essere collegati in due diversi modi:

1. Resistori in serie: quando hanno un estremo in comune. In regime stazionario l'intensità di corrente che li attraversa è lo stesso. In un collegamento in serie ciascun resistore è attraversato dalla stessa corrente e la resistenza equivalente è la somma delle resistenze dei singoli componenti. La resistenza equivalente è maggiore del valore di ciascun componente. La potenza totale invece è pari alla somma delle potenze spese nelle singole resistenze:

$$V_A - V_B = R_1 i$$

$$V_B - V_C = R_2 i$$

$$V_A - V_C = (R_1 + R_2)i = R_{eq} i$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

$$P_{tot} = (V_A - V_C)i = (R_1 + R_2)i^2 = R_{eq}i^2 = P_1 + P_2$$

2. Resistori in parallelo: quando sono collegati tra di loro in entrambi gli estremi. La differenza di potenziale risulta essere la stessa ai capi di ciascun resistore e l'inverso della resistenza equivalente è uguale alla somma degli inversi di ciascun componente. La resistenza equivalente risulta essere minore del valore di ciascun componente:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V}{R_{eq}}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$$i_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}i$$

$$i_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}i$$

$$P = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = R_1 \frac{V}{R_1^2} + R_2 \frac{V}{R_2^2} = V^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V^2}{R_{eq}} = R_{eq}i^2$$

Fem

La legge di Ohm applicata a un circuito chiuso diventa:

$$\oint E\, ds = R_T i = fem$$

Dove R_T è la resistenza totale del circuito. Questa formula afferma che per ottenere nel circuito una corrente di intensità i è necessaria la presenza, nel circuito stesso, di una sorgente di forza elettromotrice ovvero un campo E la cui circuitazione sia diversa da 0. Il campo elettrostatico non può dunque far circolare le cariche nel circuito in quanto è conservativo e ha dunque la corrispondente forza motrice sempre nulla. La Fem non deve essere nulla se si vuole il passaggio di corrente; quindi il campo elettromotore non è conservativo.

Il generatore è caratterizzato, oltre che dalla forza elettromotrice, dalla sua resistenza interna. La forza elettromotrice è uguale alla differenza di potenziale misurata ai capi del generatore aperto:

$$\mathcal{E} = \int_A^B E^* dl = \oint E^* dl$$

$$V_A - \mathcal{E} - ri - Ri = V_B$$

$$\mathcal{E} = (r + R)i = R_T i$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

$$V_B - V_A = Ri = \mathcal{E} - ri$$

$$P = \mathcal{E}i = Ri^2 + ri^2 = R_T i^2$$

DIELETTRICI

Dipolo elettrico

In elettrostatica un dipolo elettrico è un sistema composto da due cariche elettriche uguali opposte di segno e separate da una distanza costante nel tempo. Si definisce invece momento del dipolo elettrico il vettore che quantifica la separazione tra le cariche positive e negative, ovvero la polarità del sistema; tale vettore è orientato dalla carica negativa a quella positiva:

$$\vec{\rho} = qa$$

Il dipolo reagisce in presenza di un campo elettrico. Considerando un dipolo di momento p, posto in una regione in cui agisce un campo elettrostatico E uniforme, è possibile notare che sulle cariche del dipolo agiscono delle forze, la cui risultante è nulla, il cui momento meccani è però diverso da 0. La coppia di forze tenderà a far ruotare il dipolo fino a che questo non sia parallelo al campo E: solo in questa posizione infatti le forze si equilibrano completamente.

$$\vec{M} = \vec{\rho}\ x\ \vec{E}$$

$$U_e(\vartheta) = -\rho E$$

Campo e capacità

Con il termine dielettrico si intende un materiale non conduttore; in presenza di un campo elettrico esterno dunque in essi non si genera alcun movimento di cariche. Sperimentalmente si osserva che introducendo tra le armature di un condensatore un dielettrico si ha una diminuzione della differenza di potenziale, di conseguenza diminuirà anche il valore del campo stesso. Il rapporto tra la differenza di potenziale tra le armature nel vuoto e quelle riempite di dielettrico è un valore sempre maggiore di 1 che prende il nome di costate elettrica relativa. Questa costante dipende dal materiale e non dalla carica o dalle dimensioni e forma dell'armatura:

$$k = \frac{V_0}{V_k} > 1$$

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{k}$$

$$E = \frac{\Delta V}{h} = \frac{\Delta V_0}{kh} = \frac{E_0}{k}$$

Aggiungendo un dielettrico inoltre la capacità del condensatore aumenta, indipendentemente dalla forma del condensatore:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Qk}{\Delta V_0} = C_0 k$$

Tutto ciò può essere spiegato tramite il concetto di polarizzazione.

Polarizzazione sostanze apolari

Analizziamo microscopicamente un sistema formato da un condensatore costituito da due piastre metalliche tra le quali è presente un dielettrico. L'applicazione di un campo elettrico, in un conduttore, produce uno spostamento di cariche. Lo stesso campo applicato ad un dielettrico non produce moto ma ha alcune conseguenze:

1. Gli elettroni risentono di una forza opposta al campo
2. Le cariche positive risentono di una forza concorde al campo
3. Sostanze apolari = un pezzo di dielettrico non polare posto in un campo elettrico si polarizza. Gli atomi o le molecole si deformano assumendo una configurazione di equilibrio come un dipolo, questo perché le cariche non possono muoversi liberamente. Il centro di massa delle cariche positive coincide con il centro di massa di quelle negative. In questo

caso gli effetti della polarizzazione si hanno solo se si applica un campo elettrico esterno: i centri delle distribuzioni di carica all'interno di ciascuna molecola si separano sufficientemente da creare i dipoli e quindi può avvenire la polarizzazione del dielettrico. Il momento di dipolo elettrico può essere considerato come un vettore, noto il numero atomico Z:

$$\vec{p} = Ze\vec{x}$$

dove x è il vettore che va dal centro della carica negativa al nucleo. Il tutto può essere visto come l'accumularsi di una carica negativa sulla faccia della lastra vicino all'elettrodo positivo ed una carica, uguale in modulo, ma positiva sulla faccia opposta del dielettrico. Globalmente la lastra resta neutra, ma al suo interno si crea un campo E' minore del campo esterno E_0 ed in verso opposto ad esso, pertanto, l'effetto finale è di ottenere un campo E minore di quello di partenza E_0.

Polarizzazione sostanze polari

Analizziamo microscopicamente un sistema formato da un condensatore costituito da due piastre metalliche tra le quali è presente un dielettrico. L'applicazione di un campo elettrico, in un conduttore, produce uno spostamento di cariche. Lo stesso campo applicato ad un dielettrico non produce moto ma ha alcune conseguenza:

1. Gli elettroni risentono di una forza opposta al campo
2. Le cariche positive risentono di una forza concorde al campo
3. Sostanze polari = tali sostanza possiedono un momento di dipolo intrinseco. In assenza di campo i dipoli sono orientanti casualmente, mentre non appena la sostanza viene inserita in un campo elettrico E, questi si orientano parallelamente al campo stesso, anche se l'allineamento, di fatto, non è mai completo a causa dell'agitazione termica. L'allineamento dunque cresce al crescere del campo esterno e al diminuire della temperatura. Possiamo indicare il vettore di polarizzazione o momento di dipolo per unità di volume, preso n come numero di atomi per unità di volume come:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\Delta V} = \vec{p}n$$

Per dielettrici lineare possiamo definire una formula più specifica del vettore polarizzazione:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(k-1)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

Qualunque sia la forma del dielettrico, la densità superficiale delle cariche di polarizzazione è uguale alla componente di P lungo la normale alla superficie:

$$\sigma_{pol} = \vec{P}\vec{n}$$

Se la polarizzazione è uniforme, non si hanno cariche all'interno ma solo sulla superficie, con carica totale nulla. Se la polarizzazione invece non è uniforme, si hanno cariche di polarizzazione anche all'interno, ma la somma delle cariche di polarizzazione superficiale e di volume deve essere nulla.

Poniamo ora una piastra di dielettrico tra due piastre conduttrici uniformemente cariche con carica uguale e opposta. Le cariche libere sui conduttori producono un campo elettrico E che polarizza la piastra di dielettrico: si creano cariche di polarizzazione sulle superfici del dielettrico che a loro volta creano nel dielettrico un campo elettrico opposto ad E:

$$\sigma_{pol}^{-} = -P$$

$$\sigma_{pol}^{+} = +P$$

Globalmente le cariche si elidono in parte lasciando una carica effettiva su ciascuna faccia:

$$\sigma = \sigma_{lib} - P$$

Possiamo quindi ora scrive il campo elettrico finale ed esplicitare dunque il valore della densità di cariche libere:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{lib} - P}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_{lib} = \varepsilon_0 E + P$$

Introduciamo ora il vettore di induzione elettrica cioè è un vettore utilizzato per descrivere la polarizzazione elettrica di un materiale dielettrico in seguito all'applicazione di un campo elettrico:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

Nel caso che stiamo prendendo in considerazione la componente di D lungo la normale alla superficie di un conduttore immerso in un dielettrico, dà la densità di carica superficiale del conduttore stesso:

$$\sigma_{lib} = \sigma \overrightarrow{u_n} = \vec{D} \overrightarrow{u_n}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}\, \overrightarrow{u_n}$$

Possiamo ora scrivere la legge di Gauss per i dielettrici: il flusso dell’induzione elettrica attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma delle cariche libere contenute all’interno della superficie stessa. Nei dielettrici quindi le cariche libere sono le sorgenti del vettore induzione, mentre nel vuoto lo erano per il campo elettrico quindi:

$$\oint \vec{D}\, d\vec{S} = Q$$

Inoltre è possibile affermare che la divergenza del vettore induzione dielettrica è uguale alla densità di carica libera.

Meccanismo di polarizzazione nei gas

Consideriamo un atomo d’idrogeno costituito da un protone e da un elettrone e schematizziamo tale atomo secondo un modello planetario. Supponiamo inoltre di avere un campo elettrico costante che provocherà uno spostamento dell’orbita elettronica a sinistra mentre il nucleo si sposterà a destra. Si raggiungerà l’equilibrio non appena le forze esercitate sull’atomo si eguaglieranno; sull’atomo infatti agiscono due forze:

$$F = qE_0$$

$$F' = qE' = q\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

$$E_0 = E' = \frac{q\delta}{\frac{4}{3}\pi a^3 3\varepsilon_0} = \frac{p}{4\pi a^3 \varepsilon_0}$$

Notiamo dunque che è presente un momento dipolo: se dunque una qualsiasi struttura non polare viene immersa in un campo elettrico costante nasce un momento dipolo per deformazione della struttura atomica:

$$\vec{p} = \alpha_d \overrightarrow{E_0}$$

$$\alpha_d = 4\pi a^3 \varepsilon_0 E_0$$

Se invece la molecola è già polare si aggiunge una polarizzabilità per orientamento: maggiore è la temperatura, minore è l'orientamento:

$$\vec{p} = \alpha_0 \vec{E}$$

$$\alpha_0 = \frac{\vec{p}}{3k\tau}$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_d = 4\pi a^3 \varepsilon_0 E_0 + \frac{\vec{p}}{3k\tau}$$

$$\tan \beta = \frac{\vec{p}}{3k\tau}$$

$$\vec{p} = \alpha \overrightarrow{E_m}$$

Prendendo ora in considerazione una sfera si può giungere all'equazione di Clusius-Mossotti che lega la costante dielettrica di un mezzo alle grandezze microscopiche elettromeccaniche che lo caratterizzano, in particolare la densità e la polarizzabilità:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_+} + \overrightarrow{E_-}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{E_-} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{r_-}$$

$$\overrightarrow{E_+} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{r_+}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\overrightarrow{r_+} + \overrightarrow{r_-}) = -\frac{\rho d}{3\varepsilon_0} = -\frac{\vec{p}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{p} = \rho d$$

$$\vec{E} = \frac{p}{3\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{E_m} = \overrightarrow{E_0} + \frac{\vec{p}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{p} = \alpha \overrightarrow{E_m}$$

$$\vec{p} = \alpha \left(\overrightarrow{E_0} + \frac{\vec{p}}{3\varepsilon_0} \right)$$

$$N\vec{p} = \alpha \left(\overrightarrow{E_0} + \frac{\vec{p}}{3\varepsilon_0} \right) N$$

$$\vec{P} = \alpha\left(\overrightarrow{E_0} + \frac{\vec{p}}{3\varepsilon_0}\right)N$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\overrightarrow{E_0}$$

$$\vec{P}\left(1 - \frac{\alpha N}{3\varepsilon_0}\right) = \alpha N\overrightarrow{E_0}$$

$$\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\overrightarrow{E_0}\left(1 - \frac{\alpha N}{3\varepsilon_0}\right) = \alpha N\overrightarrow{E_0}$$

$$\alpha N\left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{3}\right) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)$$

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0}{N}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$$

Unità di misura	
Forza elettrica	N
Campo elettrico	N/C oppure V/m
Carica elettrica	C
Lavoro	J
Potenziale	V = J/C
Energia potenziale elettrostatica	V = J/C
Densità lineare	C/m
Densità superficiale	C/m^2
Flusso del campo	V m
Capacità	F = C/V
Corrente	A = C/s
Fem	V
Polarizzazione	C/m^2
Induzione elettrica	C/m^2
Densità di corrente	A/m^2
Resistenza	Ω = V/A
Resistività	Ωm
Vettore spostamento elettrico	C/m^2