Approssimazione di funzioni e dati

Definizione interpolare i dati: interpolare i dati significa determinare una funzione $\tilde{f}(x)$ tale che $\tilde{f}(x_i) = y_i$. La funzione $\tilde{f}(x)$ è chiamata interpolante di f ai noi o interpolante dei dati ai nodi.

Definizione polinomio caratteristico di Lagrange: dati $n+1$ nodi distinti $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ il polinomio caratteristico di Lagrange associato al nodo x_k è $\varphi_k(x)$ tale che $\varphi_k(x_i) = \delta k_i$:

$$\delta k_i = \begin{cases} 1 & se\ i = k \\ 0 & se\ i \neq k \end{cases} \qquad \varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Definizione polinomio Lagrange: dati $n+1$ nodi distinti $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ e la base polinomiale di Lagrange corrispondente il polinomio di Lagrange è:

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, \varphi_i(x)$$

Definizione funzione errore: se $f(x)$ è continua si definisce funzione errore la differenza tra la funzione stessa e il polinomio di Lagrange che approssima la funzione:

$$E_n(f(x)) = f(x) - \Pi_n(f(x))$$

Definizione errore: si definisce errore il massimo della funzione errore: $e_n = \max\left|E_n\big(f(x)\big)\right|$

Stima errore per nodi equispaziati:

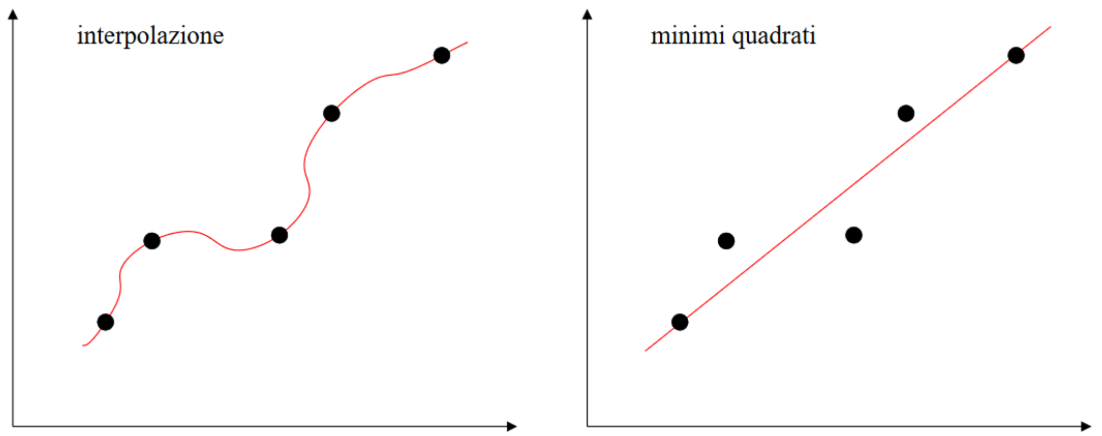
$$e_n(f) \leq \frac{1}{4(n+1)!}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \max|f^{n+1}(x)|$$

Definizione interpolante lineare composito: dati $n+1$ nodi distinti $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ nell'intervallo $I = [a,b]$ e e $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ i sottointervalli di I con ampiezza $H_i = x_i - x_{i-1}$, l'interpolante lineare composito dei dati $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{n}$ è $\Pi_1(x)$ cioè il polinomio di grado 1 a tratti.

```
f = @(x) x/2.*cos(x);
b = 6;
a = -2;
x = linspace (-2,6,1000);
y = f(x);

plot (x,y)
grid on
hold on

%per calcolare i coefficienti del polinomio interpolante occorre conoscere il grado
del polinomio n, i nodi dell'interpolazione che si ricavano nota l'ampiezza dei
sottointervalli e la valutazione della funzione in questi nodi

n=2;
h = (b-a)/n;
x_nod = [a:h:b];
f_nod = f(x_nod);
P = polyfit (x_nod, f_nod, n);

% per calcolare ora il polinomio interpolante o meglio i valori che questo assume in
un intervallo occorre conoscere i coefficienti del polinomio interpolante e i valori
dell'intervallo stesso

interp = polyval(P,x);
plot (x, interp)
```

```
hold on


%errore è il modulo della differenza del polinomio e la funzione iniziale
err = abs(interp-y);
plot (x, err)
err_max = max (err)
```

Metodo dei minimi quadrati: L'approssimazione ai minimi quadrati `e una tecnica di ottimizzazione volta a determinare una funzione analitica che approssimi un insieme di dati senza necessariamente passare per i dati stessi (interpolazione), o meglio che si avvicini più possibile ad un'interpolazione di un insieme di dati (tipicamente punti del piano). Infatti, se i dati provengono da misure sperimentali e sono quindi affetti da errore oppure se non sono molto precisi (poche cifre significative) allora `e opportuno approssimare ai minimi quadrati anziché interpolare. In particolare, la funzione trovata deve essere quella che minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai punti.



Equivalenza tra minimo di energia e approssimazione nel senso dei minimi quadrati

<u>Enunciato</u>: minimizzare l'energia $\Phi(\vec{b})$, definita come segue, equivale a determinare i coefficiente $\vec{a}$ che definiscono la retta di regressione, ovvero:

$$\Phi(\vec{b}) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - (b_0 + b_1 x_i + \cdots + b_m x_i^m)]^2$$

$$\Phi(\vec{a}) = \min \Phi(\vec{b})$$

<u>Dimostrazione</u>: dimostriamo l'enunciato dimostrando il caso specifico semplice in cui $m = 1$. Se $m = 1$ l'energia assume la seguente forma:

$$\Phi(\vec{b}) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i^2 + (b_0 + b_1 x_i)^2 - 2y_i(b_0 + b_1 x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i^2 + b_0^2 + b_1^2 x_i^2 + 2b_0 b_1 x_i - 2y_i b_0 - 2y_i b_1 x_i$$

Affinché sia possibile ricavare il minimo dell'energia occorre derivare questa funzione rispetto $\vec{b}$ è imporre tali derivate uguale a zero, per il teorema di Fermat. Dunque le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial \Phi(\vec{b})}{\partial b_0} = \sum_{i=0}^{n} 2b_0 + 2b_1 x_i - 2y_i = 2\sum_{i=0}^{n} b_0 + b_1 x_i - y_i$$

$$\frac{\partial \Phi(\vec{b})}{\partial b_1} = \sum_{i=0}^{n} 2b_1 x_i^2 + 2b_0 x_i - 2y_i x_i = 2\sum_{i=0}^{n} b_1 x_i^2 + b_0 x_i - y_i x_i$$

A questo punto è possibile riscrivere:

$$\vec{b} = \vec{a} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \qquad -\vec{q} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} -y_i \\ \sum_{i=0}^{n} -y_i x_i \end{bmatrix} \rightarrow \vec{q} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \end{bmatrix}$$

A questo punto si può ottenere:

$$A\vec{a} - \vec{q} = 0$$

$$A\vec{a} = \vec{q}$$