Capitolo 4. Reti trifase

Esercizio 4.1

Dato il circuito di Figura 4.1 sono noti:

$\overline{V}f1 = 180\ \text{V}$

$\overline{V}f2 = -j180\ \text{V}$

$\overline{V}f3 = j180\ \text{V}$

$\overline{Z}1 = 10\,\Omega,\ \overline{Z}2 = 20\,\Omega,$

$\overline{Z}3 = 5 + j20\,\Omega$

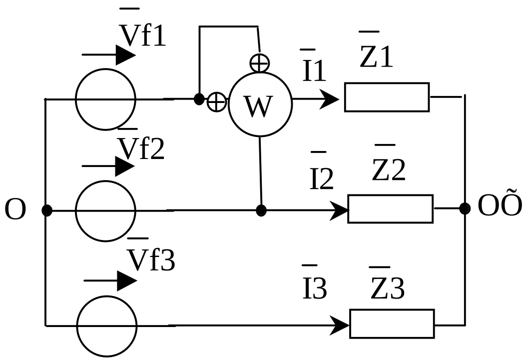

Figura 4.1

Determinare le tre correnti di fase e l'indicazione del wattmetro.

Soluzione

La tensione Vo'o può essere calcolata utilizzando la formula di Millman:

$$Vo'o = \frac{\dfrac{\overline{V}f1}{\overline{Z}1} + \dfrac{\overline{V}f2}{\overline{Z}2} + \dfrac{\overline{V}f2}{\overline{Z}2}}{\dfrac{1}{\overline{Z}1} + \dfrac{1}{\overline{Z}2} + \dfrac{1}{\overline{Z}2}} = 162.26 + j4.66\ \text{V}$$

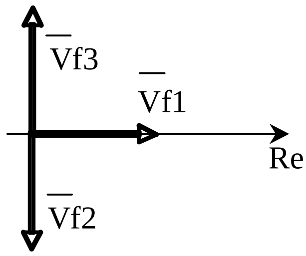

Figura 4.2

con le LKT si posso determinare le tensioni sulle impedenze e di conseguenza le correnti:

$$\overline{I}1=\frac{\overline{V}f1-\overline{V}o'o}{\overline{Z}1}=1.772-j0.466\ A$$
$$\overline{I}2=\frac{\overline{V}f2-\overline{V}o'o}{\overline{Z}2}=-8.114-j9.233\ A$$
$$\overline{I}3=\frac{\overline{V}f3-\overline{V}o'o}{\overline{Z}3}=6.342-j9.699\ A$$

La corrente misurata dal wattmetro coincide con $\overline{I}1$ *mentre la tensione è* $\overline{V}w=\overline{V}f1-\overline{V}f2$*=180+180j, da cui:*

$W = \mathrm{Re}(\overline{V}w\cdot \underline{I}1)= 235\ W$

Esercizio 4.2

Dato il circuito di Figura 4.3 sono noti:

$$\overline{V}f1=180\ \mathrm{V}$$
$$\overline{V}f2=180\cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi}\ \mathrm{V}$$
$$\overline{V}f3=180\cdot e^{j\frac{2}{3}\pi}\ \mathrm{V}$$

$$\overline{Z}1=\overline{Z}2=\overline{Z}3=\overline{Z}=5+j20\,\Omega$$

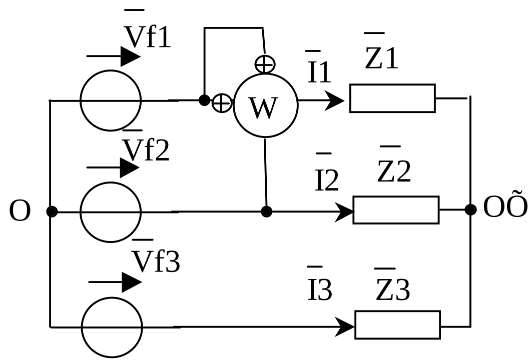

Figura 4.3

Determinare le tre correnti di fase e l'indicazione del wattmetro.

Soluzione

Il sistema è simmetrico ed equilibrato, di conseguenza la tensione Vo'o è nulla. Le correnti di fase possono essere quindi calcolate semplicemente come:

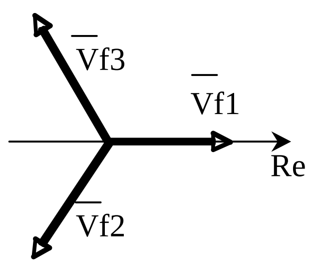

Figura 4.4

$$\overline{I}1=\frac{\overline{V}f1}{\overline{Z}}=2.118+j8.471\ A$$
$$\overline{I}2=\frac{\overline{V}f2}{\overline{Z}}=-8.395+j2.401\ A$$
$$\overline{I}3=\frac{\overline{V}f3}{\overline{Z}}=+6.277+j6.069\ A$$

La corrente misurata dal wattmetro coincide con I1 mentre la tensione è $\overline{V}w = \overline{V}f1 - \overline{V}f2 = 270 + j155.885\ V$ *da cui:*

$P = \text{Re}(\overline{V}w \cdot \underline{I}w) = \text{-}748.66\ \text{W}$

Esercizio 4.3

Dato il circuito di Figura 4.3 sono noti:

$\overline{V}f1 = 180\ \text{V}$

$\overline{V}f2 = 180 \cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi}\ \text{V}$

$\overline{V}f3 = 180 \cdot e^{j\frac{2}{3}\pi}\ \text{V}$

$\overline{Z}1 = 10\ \Omega,\ \overline{Z}2 = 20\ \Omega,$
$\overline{Z}3 = 5 + j20\ \Omega$

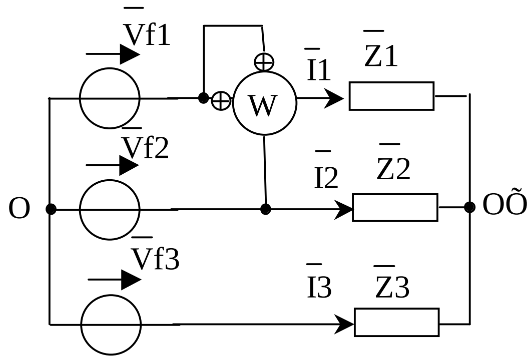

Figura 4.5

Soluzione

La tensione Vo'o può essere calcolata utilizzando la formula di Millman:

$$Vo'o = \frac{\frac{\overline{V}f1}{\overline{Z}1} + \frac{\overline{V}f2}{\overline{Z}2} + \frac{\overline{V}f2}{\overline{Z}2}}{\frac{1}{\overline{Z}1} + \frac{1}{\overline{Z}2} + \frac{1}{\overline{Z}3}} = 115.578 + j22.959\ \text{V}$$

con le LKT si posso determinare le tensioni sulle impedenze e di conseguenza le correnti:

$$I1 = \frac{\overline{V}f1 - \overline{V}o'o}{\overline{Z}1} = 6.442 - j2.296\ A$$

$$\overline{I}2 = \frac{\overline{V}f2 - \overline{V}o'o}{\overline{Z}2} = -10.279 - j8.942\ A$$

$$\overline{I}3 = \frac{\overline{V}f3 - \overline{V}o'o}{\overline{Z}3} = 3.837 - j11.238\ A$$

La corrente misurata dal wattmetro coincide con I1 mentre la tensione è $\overline{V}w = \overline{V}f1 - \overline{V}f2 = 270 + j155.885$ *V da cui:*

P =Re($\overline{V}w \cdot \underline{I}w$) = 1381 W

Esercizio 4.4

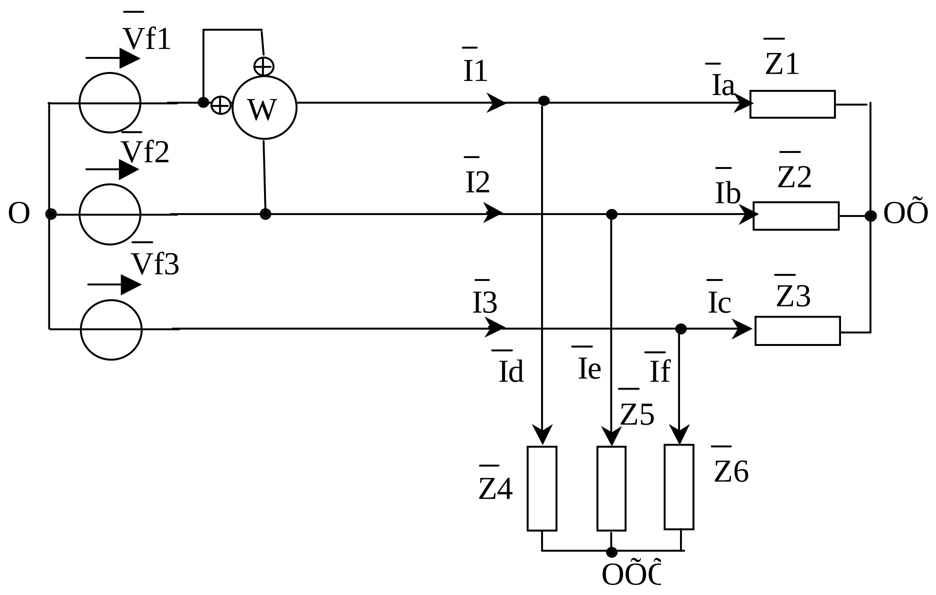

Figura 4.6

Dato il circuito di Figura 4.6 sono noti:

$\overline{V}f1 = 180$ V
$\overline{V}f2 = -j180$ V
$\overline{V}f3 = j180$ V

$\overline{Z}1 = 10\,\Omega,\ \overline{Z}2 = 20\,\Omega,\ \overline{Z}3 = 5 + j20\,\Omega,$
$\overline{Z}4 = 2 + j4\,\Omega, \overline{Z}5 = j20\,\Omega, \overline{Z}6 = 30\,\Omega$

determinare le correnti di linea e l'indicazione del wattmetro.

Soluzione

Le tensioni Vo'o e Vo''o possono essere calcolate utilizzando la formula di Millman:

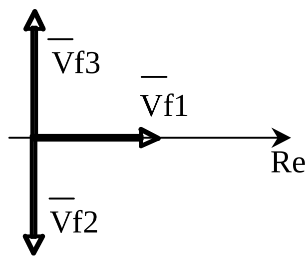

Figura 4.7

$$Vo'o = \frac{\frac{\overline{V}f1}{\overline{Z}1} + \frac{\overline{V}f2}{\overline{Z}2} + \frac{\overline{V}f3}{\overline{Z}3}}{\frac{1}{\overline{Z}1} + \frac{1}{\overline{Z}2} + \frac{1}{\overline{Z}3}} = 162.28 + j4.663 \text{ V}$$

$$Vo''o = \frac{\frac{\overline{V}f1}{\overline{Z}4} + \frac{\overline{V}f2}{\overline{Z}5} + \frac{\overline{V}f3}{\overline{Z}6}}{\frac{1}{\overline{Z}4} + \frac{1}{\overline{Z}5} + \frac{1}{\overline{Z}6}} = 108.374 + j21.799 \text{ V}$$

con le LKT si posso determinare le tensioni sulle impedenze e di conseguenza le correnti:

$$\bar{I}a = \frac{\overline{V}f1 - \overline{V}o'o}{\overline{Z}1} = 1.772 - j0.466 \ A$$
$$\bar{I}b = \frac{\overline{V}f2 - \overline{V}o'o}{\overline{Z}2} = -8.114 - j9.233 \ A$$
$$\bar{I}c = \frac{\overline{V}f3 - \overline{V}o'o}{\overline{Z}3} = 6.342 - j9.699 \ A$$

$$\bar{I}d = \frac{\overline{V}f1 - \overline{V}o''o}{\overline{Z}4} = 11.522 - j12.145 \ A$$
$$\bar{I}e = \frac{\overline{V}f2 - \overline{V}o''o}{\overline{Z}5} = -7.91 + j5.419 \ A$$
$$\bar{I}f = \frac{\overline{V}f3 - \overline{V}o'o}{\overline{Z}6} = -3.612 + j6.727 \ A$$

con le LKC ai nodi si ricavano le correnti di linea:

$$\bar{I}1 = \bar{I}a + \bar{I}d = 13.295 - j12.612 \ A$$
$$\bar{I}2 = \bar{I}b + \bar{I}e = -16.024 - j3.814 \ A$$
$$\bar{I}3 = \bar{I}c + \bar{I}f = 2.73 + j16.426 \ A$$

La corrente misurata dal wattmetro coincide con I1 mentre la tensione è $\overline{V}w = \overline{V}f1 - \overline{V}f2 = 180 + j180 \ V$ *da cui:*

$P = \mathrm{Re}(\overline{V}w \cdot \underline{I}w) = 122.91$ W

Esercizio 4.5

Dato il circuito di Figura 4.8 sono noti:

$\overline{V}f1 = 80\ \text{V}$
$\overline{V}f2 = j100\ \text{V}$
$\overline{V}f3 = -120\ \text{V}$

R = 7 Ω
$\overline{Z}1 = 10 + j20\,\Omega,\ \overline{Z}2 = 30\,\Omega,$
$\overline{Z}3 = -j15\,\Omega,\ \overline{Z}0 = 3 + j1\,\Omega$

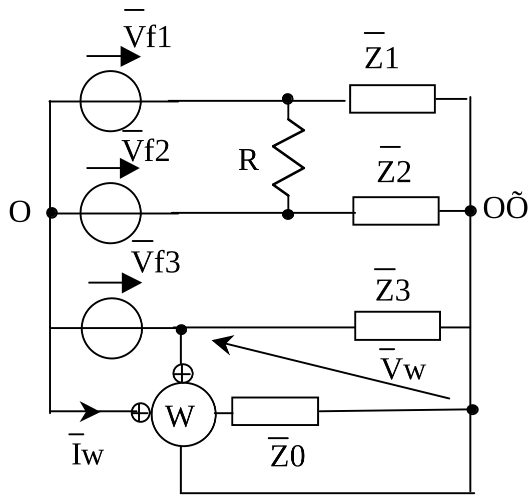

Figura 4.8

Soluzione

E' necessario calcolare la corrente $\overline{I}w$ e la tensione $\overline{V}w$ rispetto i morsetti contrassegnati del wattmetro. La tensione $\overline{V}w$ è quella che si ha ai capi di Z3, mentre la corrente $\overline{I}w$ è quella che percorre l'impedenza Zo.

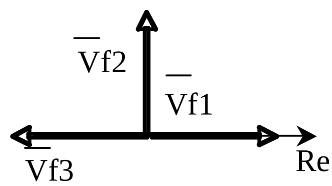

Figura 4.9

La tensione tra il centro stella delle tensioni e il centro stella di Z1, Z2, Z3 e Zo può essere calcolata con la formula di Millman

$$Vo'o = \frac{\frac{\overline{V}f1}{\overline{Z}1} + \frac{\overline{V}f2}{\overline{Z}2} + \frac{\overline{V}f3}{\overline{Z}3}}{\frac{1}{\overline{Z}1} + \frac{1}{\overline{Z}2} + \frac{1}{\overline{Z}3} + \frac{1}{\overline{Z}o}}$$ *= 8.772-j20.444V (non dipende da R)*

La tensione $\overline{V}w$ è pari a $\overline{V}w = \overline{V}f3 - Vo'o$ = -128.771+j20.444 V. La corrente Iw è pari a $\overline{I}w$ = -$\overline{V}o'o/\overline{Z}o$ = -0.587+j7.01 A. L'indicazione del wattmetro è quindi:

$P = \text{Re}(\overline{V}w \cdot \underline{I}w)$ = 218.91 W

Esercizio 4.6

Dato il circuito di Figura 4.10 sono noti:

$\overline{V}f1 = j180$ V

$\overline{V}f2 = 180 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\pi\right)}$ V

$\overline{V}f3 = 180 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)}$ V

$\overline{Z}1 = 20 + j15\ \Omega$

$\overline{Z}2 = 5 - j8\ \Omega$

$\overline{Z}3 = 10 + j2\ \Omega$

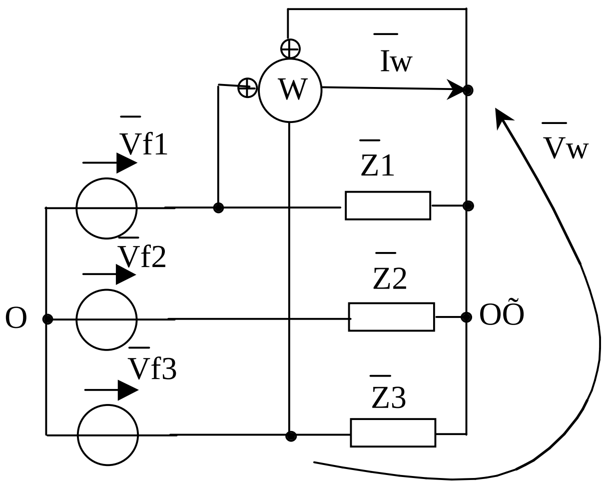

Figura 4.10

Determinare le tre correnti di fase e l'indicazione del wattmetro.

Soluzione

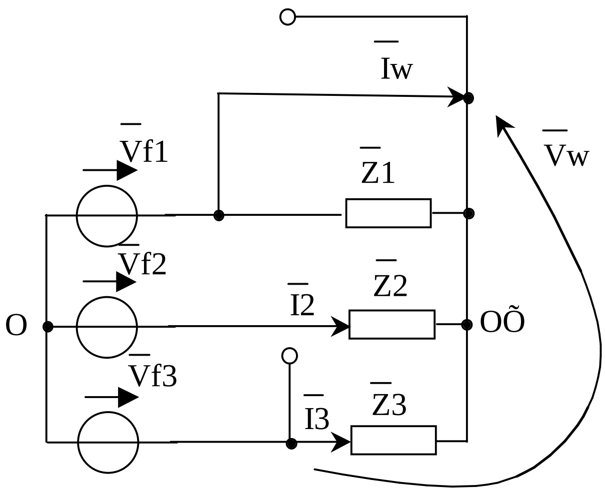

Figura 4.10

E' necessario calcolare la corrente $\overline{I}w$ e la tensione $\overline{V}w$ rispetto i morsetti contrassegnati del wattmetro

Prima di procedere al calcolo conviene sostituire al wattmetro il suo circuito equivalente che consiste in un circuito aperto tra i morsetti volumetrici e un corto circuito tra i morsetti amperometrici.

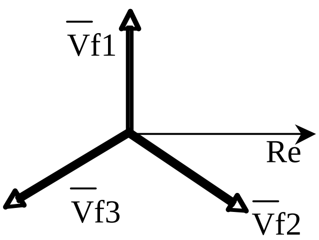

Figura 4.11

La corrente $\overline{I}w$ è quindi la corrente che percorre il corto circuito in parallelo all'impedenza Z1. La tensione $\overline{V}w$ è data da

$\overline{V}w$ = $\overline{V}f1$-$\overline{V}f3$= 155.88+j270 V. La corrente Iw si può calcolare con una legge al nodo come somma algebrica dei due

contributi relativi alle fasi 2 e 3. La tensione tra i due centri stella è infatti pari a $\overline{V}f1$, essendo cortocircuitata l'impedenza Z1. Si ottiene allora
$\overline{I}2$ = ($\overline{V}f2$-$\overline{V}f1$)/$\overline{Z}2$ = 33.027-j1.156 A, diretta verso destra e
$\overline{I}3$ = ($\overline{V}f3$-$\overline{V}f1$)/$\overline{Z}3$ =-20.18-j22.964 A, diretta verso destra.

La corrente $\overline{I}w$ è data da $\overline{I}w$ = -$\overline{I}2$-$\overline{I}3$ = -12.847+j24.12 A.

L'indicazione del wattmetro è allora pari a P $=\mathrm{Re}(\overline{V}w \cdot \underline{I}w)$ = 4510 W

Esercizio 4.7

Dato il circuito di Figura 4.12 sono noti:

$\overline{V}f1 = 220\ \mathrm{V}$

$\overline{V}f2 = 220 \cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi}\ \mathrm{V}$

$\overline{V}f2 = 220 \cdot e^{j\frac{2}{3}\pi}\ \mathrm{V}$

R = 4 Ω, Xc = 10 Ω

$\overline{Z}1 = \overline{Z}2 = \overline{Z}3 = \overline{Z} = j10\ \Omega$

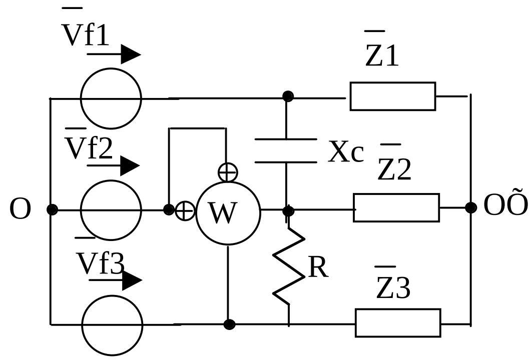

Figura 4.12

Determinare l'indicazione del wattmetro W.

Soluzione

E' necessario calcolare la corrente $\overline{I}w$ e la tensione $\overline{V}w$ rispetto i morsetti contrassegnati. La corrente $\overline{I}w$ si trova dalla legge al nodo come somma di tre contributi: la corrente che precorre l'impedenza Z2, la corrente che interessa la resistenza R (diretta verso il basso) e la corrente che interessa la reattanza Xc (diretta verso l'alto).
La tensione tra i due centri stella Vo'o è nulla essendo la terna simmetrica e le tre impedenze uguali (non dipende dai carichi trasversali R e Xc) .Di conseguenza la corrente che interessa l'impedenza Z2 è pari a
$\overline{I}z2 = \overline{V}f2$/Z2=-19.053+j11 A.
La corrente Ir che interessala resistenza è data da
$\overline{I}r$ = ($\overline{V}f2$-$\overline{V}f3$)/R=-j95.26 A
e la corrente che interessa la reattanza Xc è data da

$\bar{I}c = (\bar{V}f2 - \bar{V}f1)/(-jXc)$=19.05-j33 A.
La corrente $\bar{I}w$ è pari a
$\bar{I}w = \bar{I}z2 + \bar{I}r + \bar{I}c$=-j117.26 A.
La tensione $\bar{V}w$ si trova con una semplice legge alle maglie ed e' pari a $\bar{V}w = \bar{V}f2 - \bar{V}f3$ e l'indicazione del wattmetro è pari a P =Re($\bar{V}w \cdot \underline{I}w$) =44.68 kW.

Esercizio 4.8

Dato il circuito di Figura 4.13, alimentato da una terna simmetrica diretta di tensioni sono noti:

Vf = 200V

Z1 = 5- j10 Ω
Z2 = 15+j10 Ω
Z0 = 10-j20 Ω

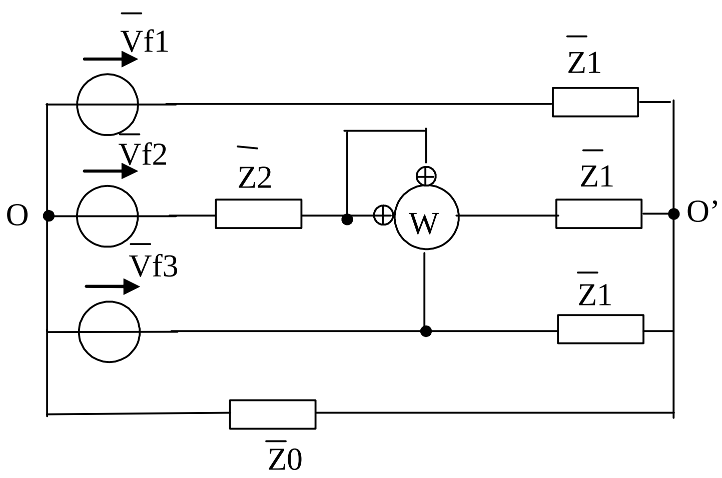

Figura 4.13

Determinare l'indicazione del wattmetro

Soluzione

E' necessario calcolare la corrente Iw w la tensione Vw rispetto ai morsetti contrassegnati del wattmetro. Essendo alimentato con una terna diretta di tensioni i fasori corrispondenti sono:

$$\bar{V}f1 = 200 \text{ V}$$
$$\bar{V}f2 = 200 \cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi} \text{ V}$$
$$\bar{V}f3 = 200 \cdot e^{j\frac{2}{3}\pi} \text{ V}$$

La corrente Iw è pari alla corrente che percorre le impedenze Z2 e Z1. Per il calcolo della corrente conviene trovare la tensione Vo'o.

$$Vo'o=\frac{\frac{\overline{V}f1}{\overline{Z}1}+\frac{\overline{V}f2}{\overline{Z}1+\overline{Z}2}+\frac{\overline{V}f3}{\overline{Z}1}}{\frac{1}{\overline{Z}1}+\frac{1}{\overline{Z}1+\overline{Z}2}+\frac{1}{\overline{Z}1}+\frac{1}{\overline{Z}o}}=-15.6+j62.58\,V$$

da cui

$$\bar{I}w=\frac{\overline{V}f2-\overline{V}o'o}{\overline{Z}1+\overline{Z}2}=-4.22+j11.79A$$

Per il calcolo della tensione Vw è necessario scrivere la LKT da cui:

$$\overline{V}w=\overline{V}f2-\overline{Z}2\bar{I}w-\overline{V}f3=-54.59-j127.37V$$

e l'indicazione del wattmetro è pari a P =Re($\overline{V}w\cdot\underline{I}w$) =1732 W.

Esercizio 4.9

Dato il circuito di figura 4.14 sono noti:
v1(t)=$\sqrt{2}$ 220cos(ωt)
v2(t)=$\sqrt{2}$ 220cos(ωt+π/2)
v3(t)=$\sqrt{2}$ 220cos(ωt-π/3)

R=10 Ω, L1 = 5mH,
L2=10 mH, L3 = 15 mH

f =50Hz

Determinare la corrente I.

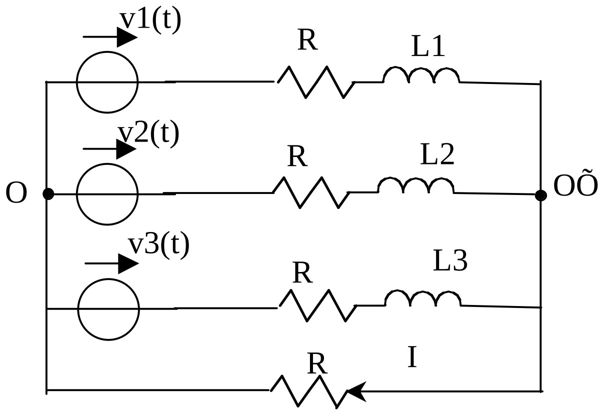

Figura 4.14

Soluzione

Bisogna per prima cosa determinare i fasori corrispondenti delle tensioni di alimentazione e delle impedenze. Si nota comunque che l'alimentazione non è simmetrica e il carico non è equilibrato.

$\overline{V}f1$=*220 V,* $\overline{V}f2$=*220* $e^{j\pi/2}$ *V,* $\overline{V}f3$=*220* $e^{-j\pi/3}$*V*

$$\overline{Z}1=R+j\omega L1=5+j1.57\,\Omega$$

$\overline{Z}2 = R + j\omega L1 = 5 + j3.14\ \Omega$
$\overline{Z}3 = R + j\omega L1 = 5 + j4.71\ \Omega$
$\overline{Z}0 = R = 5\ \Omega$

La tensione tra i centri stella è pari a:

$$Vo'o = \frac{\frac{\overline{V}f1}{\overline{Z}1} + \frac{\overline{V}f2}{\overline{Z}2} + \frac{\overline{V}f3}{\overline{Z}3}}{\frac{1}{\overline{Z}1} + \frac{1}{\overline{Z}2} + \frac{1}{\overline{Z}3} + \frac{1}{\overline{Z}0}} = 77.477 + j8.665\,V$$

da cui la corrente vale $\overline{I} = \overline{V}o'o / R$ *=7.748 + j0.866 A*

Esercizio 4.10

Dato il circuito di Figura 4.15 alimentato da una terna simmetrica diretta di tensioni, sono noti:

Vf = 100 V
R = 20 Ω
$\overline{Z}1 = 2 + j5\ \Omega$
$\overline{Z}2 = 3 - j7\ \Omega$
$\overline{Z}3 = 4\ \Omega$
$\overline{Z}0 = j9\ \Omega$

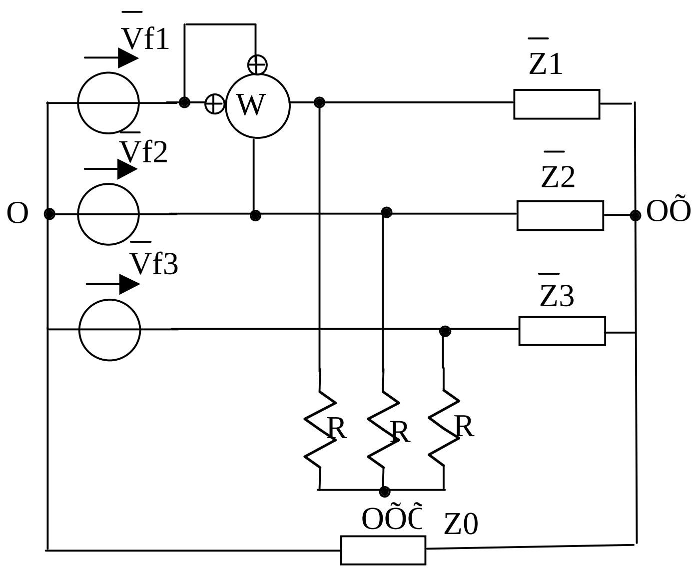

Figura 4.15

Determinare l'indicazione del wattmetro, scegliendo come asse di riferimento per il favore della fase 1 l'asse immaginario

Soluzione
Bisogna per prima cosa determinare i fasori corrispondenti delle tensioni che essendo una terna simmetrica diretta hanno espressione:

$\overline{V}f1$*=j100 V,* $\overline{V}f2$*=j100* $e^{-j2\pi/3}$ *V,* $\overline{V}f3$*=j100* $e^{j2\pi/3}$*V*

Per calcolare la corrente Iw è necessario calcolare la corrente che passa nell'impedenza Z1 e sommarla a quella del carico formato dalle resistenze.
La tensione Vo'o non dipende dal carico trasversale formato dalle tre resistenze e vale.

$$Vo'o = \frac{\frac{\overline{V}f1}{\overline{Z}1} + \frac{\overline{V}f2}{\overline{Z}2} + \frac{\overline{V}f3}{\overline{Z}3}}{\frac{1}{\overline{Z}1} + \frac{1}{\overline{Z}2} + \frac{1}{\overline{Z}3} + \frac{1}{\overline{Z}0}} = 11.557 + j11.18V$$

La corrente che percorre Z1 è quindi:

$$\overline{I}z1 = \frac{\overline{V}f1 - \overline{V}o'o}{\overline{Z}1} = 14.517 + j8.118A$$

La tensione Vo''o è invece nulla essendo il carico formato dalle tre resistenze equilibrato e le tensioni simmetriche. Di conseguenza $\overline{I}r = \overline{V}f1/R$ *=j5 A. La corrente Iw si ottiene con una legge al nodo Iw = Ir+Iz1 = 14.517+j13.118 A. L'indicazione del wattmetro è pari a P* =Re*(*$\overline{V}w \cdot \underline{I}w$*) =710.53 W.*