ROTORI FLESSIONALI

Introduzione

Uno dei problemi di dinamica maggiormente conosciuto è quello riguardante i rotori. Si definisce rotore la parte rotante attorno al proprio asse, se esiste, di un macchinario per la generazione o la trasmissione di potenza. I rotori possono essere pensati come corpi rigidi (ovvero corpi a sé stanti e quindi si può studiare lo squilibrio statico e quello dinamico), oppure possono essere studiati come corpi montati su alberi flessibili (non capisco cosa intendi). Gli sbilanciamenti in questi casi possono determinare la deformazione flessionale dell'albero che supporta il rotore e possono quindi nascere fenomeni vibratori.

Squilibrio dei rotori flessionali

La maggior parte dei rotori reali, rigidi o deformabili che siano, sono squilibrati e disallineati. Tale squilibrio genera un campo di forze rotante con l'albero che dà origine a delle vibrazioni; tali vibrazioni sono definite come "risposta del rotore allo squilibrio". Le oscillazioni si esaltano quando la frequenza di rotazione, e quindi la forzante dovuta allo squilibrio, coincide con una delle frequenze proprie flessionali del rotore. Le velocità corrispondenti vengono chiamate "velocità critiche flessionali".

Cause dello squilibrio e quindi delle vibrazioni

Gli squilibri, e quindi le vibrazioni generate sul rotore, possono essere causate da:

- Distribuzione non omogena del materiale
- Rotori differenti giuntati tra di loro non perfettamente, Disallineamento dei rotori
- Ingobbimento dei rotori = dovuti a una distribuzione di temperatura a simmetria non polare che induce deformazioni anelastiche termiche che portano a una deflessione e quindi a un ingobbimento della trave che comincia ad oscillare con frequenze non equilibrate. Successivamente questo problema può comportare anche problemi nel disallineamento dei rotori stessi durante la fase di montaggio e non solo
- Alti gradienti di temperatura
- Presenza di giunti di collegamento
- Deformazioni permanenti del rotore dovute all'inflessione generata dalla forza peso, ad esempio
- Differente rigidezza flessionale al variare della posizione angolare: ciò avviene per effetto della presenza di intagli, chiavette, espansioni polari e, a volte, per effetto di cricche che si generano nello stesso rotore

Lo squilibrio genera nel rotore un'eccentricità, ovvero il baricentro geometrico è posto a una certa distanza dal baricentro di massa. Affinché si possano evitare i problemi sopra citati e dunque per evitare lo squilibrio si può procedere con l'equilibramento dei rotori ovvero l'operazione di bilanciamento del rotore, cioè l'insieme delle operazioni che sono eseguite, attraverso l'aggiunta di masse concentrate eccentriche sul rotore, intese a minimizzare le vibrazioni dovute allo squilibrio del rotore stesso

Un rotore che ruota con velocità angolare Ω genera delle forze centrifughe. Sapendo che l'espressione della forza centrifuga generale è:

$$F = m\omega^2 r = m\Omega^2 \vec{\varepsilon}$$

Massa del rotore

Velocità angolare del rotore Ω

Nel nostro caso il raggio è l'eccentricità $\vec{\varepsilon}$, che è un vettore rotante

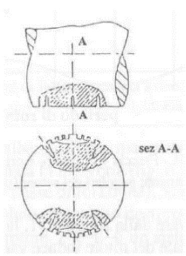
In forma complessa la forza centrifuga agente sul rotore risulta essere:

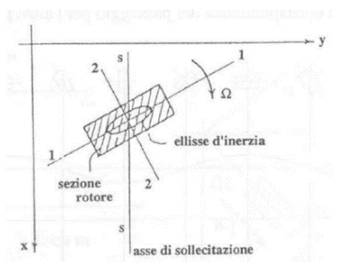
$$\vec{F}(\xi) = \overrightarrow{F_0}(\xi)e^{i\Omega t} = m\vec{\varepsilon}(\xi)\Omega^2 e^{i\Omega t} = m|\vec{\varepsilon}(\xi)|e^{i\gamma\xi}\Omega^2 e^{i\Omega t} = m|\vec{\varepsilon}(\xi)|\Omega^2 e^{i(\gamma\xi+\Omega t)}$$

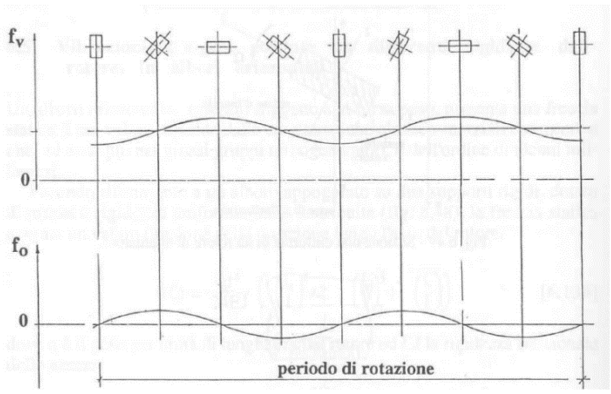
$$\overrightarrow{F_0} = m\vec{\varepsilon}(\xi)\Omega^2$$

$$\vec{\varepsilon}(\xi) = |\vec{\varepsilon}(\xi)|e^{i\gamma\xi}$$

Possono instaurarsi anche “velocità critiche flessionali di seconda armonica”, dovute alla non omogeneità del rotore (ovvero qualsiasi imperfezione: cricche, densità non omogenee, chiavette, …), dato che ogni giro si presenta due volte la medesima conformazione del sistema.



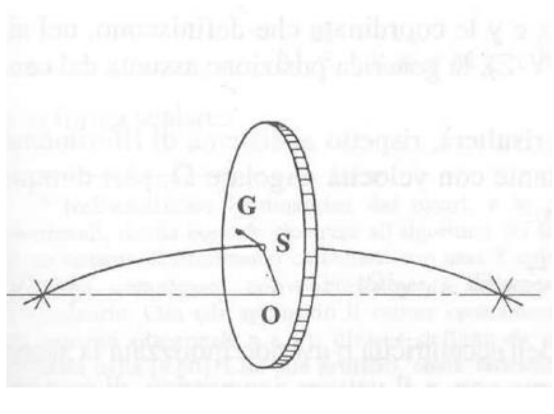




Inoltre, esistono “vibrazioni n per giro”, che nascono quando il rotore è sollecitato con forzanti che si ripetono più volte in un singolo giro (ad esempio, nelle giranti ci sono vibrazioni n per giro perché le n pale scambiano n forze).

Rotore di The Leval o di Jeffcott

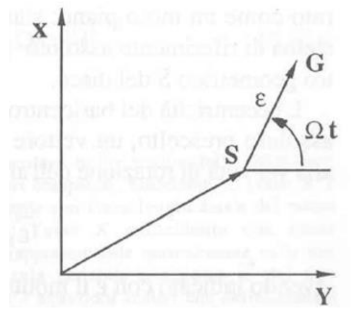
Il rotore di Jeffcott è un rotore costituito da un'asta di materiale deformabile (l’albero), nella cui mezzeria è calettato un disco sottile rigido di massa M e sbilanciato. Una coppia di cuscinetti ideali (quindi senza matrici di rigidezza dei cuscinetti; queste matrici, nel caso reale, possono introdurre instabilità dinamica (=con oscillazioni), poiché sono asimmetriche; le matrici, inoltre, variano al variare della velocità di rotazione del rotore), vincolati rigidamente ad un basamento o ad un telaio, garantisce che l'unico moto relativo del rotore sia un moto rotatorio attorno al suo asse di rotazione. L’asta a cui è calettato il disco, ovvero l’albero, è priva di massa, ruota con velocità angolare Ω e, come già accennato, è deformabile. Si suppone inoltre che la rigidezza k dell’albero si costante in tutte le direzioni e che possa essere definita come il rapporto tra la forza statica F applicata e lo spostamento del disco f per effetto della forza applicata:



$$k = \frac{F}{f}$$

Ponendo il disco sottile in mezzeria, semplifichiamo notevolmente l'equazione del moto di tutti i punti del disco: infatti, in questa specifica posizione, anche in presenza di una considerevole deformazione dell'asta, il disco rimarrà sempre parallelo a sé stesso (perpendicolare alla retta passante per i due cuscinetti), e quindi si muoverà di moto piano.

La scelta di un disco sottile non è casuale: essendo, per la sua geometria caratteristica, la dimensione assiale molto minore di quella radiale, possiamo trascurarne il momento meccanico risultante in quanto avremo una coppia di forze dal braccio trascurabile rispetto a quella data da un braccio radiale.
Nella pratica a causa di inclusioni o distribuzioni disomogenee di materiali, il baricentro reale non si trova esattamente nel baricentro geometrico S del disco, il baricentro G reale risulta distante da S di una certa quantità detta eccentricità ε che risulterà essere un vettore rotante con velocità angolare Ω pari alla velocità di rotazione dell'albero.



Definendo ora:

- Vettore eccentricità del baricentro G da S: $\vec{\varepsilon} = \varepsilon e^{i\Omega t}$
- Vettore che individua la posizione di S: $\vec{z} = y + ix$
- Vettore baricentro: $\overrightarrow{z_G} = \vec{z} + \vec{\varepsilon} = \vec{z} + \varepsilon e^{i\Omega t}$
- Derivata prima del vettore baricentro: $\overrightarrow{\dot{z}_G} = \vec{\dot{z}} + i\Omega\varepsilon e^{i\Omega t}$
- Derivata seconda del vettore baricentro: $\overrightarrow{\ddot{z}_G} = \vec{\ddot{z}} - \Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t}$
- Forza di richiamo elastico: $\overrightarrow{F_e} = -k\vec{z} = -ky - kix$
- Forza peso (supposta diretta come l'asse x): $\vec{P} = M\vec{g}$
- Forza d'inerzia: $\overrightarrow{F_i} = -M\overrightarrow{\ddot{z}_G} = -M\overrightarrow{\ddot{z}_G} = -M\left(\vec{\ddot{z}} - \Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t}\right)$

Rotore di Jeffcott: senza smorzamento

È possibile impostare l'equilibrio dinamico e ottenere dunque l'equazione di moto:

$$M\overrightarrow{\ddot{z}_G} + k\vec{z} = \vec{P}$$

$$M\left(\vec{\ddot{z}} - \Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t}\right) + k\vec{z} = M\vec{g}$$

$$M\vec{\ddot{z}} - M\Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t} + k\vec{z} = M\vec{g}$$

$$M\vec{\ddot{z}} + k\vec{z} = M\Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t} + M\vec{g}$$

Sostituendo il vettore che individua la posizione di S: $\vec{z} = y + ix$ nell'equazione sopra scritta è possibile scomporre l'equazione lungo i due assi reale ed immaginario si ottiene:

$$M(\ddot{y} + i\ddot{x}) + k(y + ix) = M\Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t} + Mgi$$

$$M\ddot{y} + Mi\ddot{x} + ky + kix = M\Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t} + Mgi$$

$$\begin{cases} M\ddot{y} + ky = M\Omega^2\varepsilon\cos(\Omega t) \\ M\ddot{x} + kx = -Mg + M\Omega^2\varepsilon\sin(\Omega t) \end{cases}$$

Le due equazioni ottenuto sono caratteristiche di un sistema a due gradi di libertà forzato e quindi è soggetto a fenomeni di risonanza quando la pulsazione della forzante Ω coincide con una frequenza propria $\omega_i\ con\ i = 1{,}2$. Nel caso di rotore squilibrato i termini forzanti hanno pulsazione Ω pari alla velocità angolare dell'albero e intensità dipendente linearmente dall'eccentricità ε del rotore e dal termine Ω^2.
Le due pulsazioni proprie dell'albero nei due piani di inflessioni coincidono:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Risolviamo ora l'equazione di moto in forma vettoriale ovvero quella ricavata in precedenza:

$$M\ddot{\vec{z}} + k\vec{z} = M\Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t} + M\vec{g}$$

Per risolvere tale equazione procediamo come segue:

- Integrale particolare = definisce il contributo della forza peso:

$$\overrightarrow{z_G} = \frac{M\vec{g}}{k}$$

- Integrale generale (è sempre particolare: è generale quando si studia l'equazione libera, mentre è particolare se si sceglie una soluzione simile alla forzante) = impongono una soluzione che abbai la stessa forma della forzante:

$$\overrightarrow{z_p}(t) = \overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t}$$

$$\dot{\overrightarrow{z_p}}(t) = i\Omega\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{\overrightarrow{z_p}}(t) = -\Omega^2\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t}$$

Sostituisco questa soluzione all'equazione vettoriale priva del contributo della forza peso (in quanto è l'equazione è linearizzata):

$$M\ddot{\overrightarrow{z_G}} + k\vec{z} = 0$$

$$M\left(\ddot{\vec{z}} - \Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t}\right) + k\vec{z} = 0$$

$$M\left(-\Omega^2\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} - \Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t}\right) + k\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} = 0$$

$$-M\Omega^2\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} - M\Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t} + k\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} = 0$$

$$(-M\Omega^2 + k)\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} = M\Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t}$$

$$(-M\Omega^2 + k)\overrightarrow{z_p} = M\Omega^2\varepsilon$$

$$\overrightarrow{z_p} = \frac{M\Omega^2\varepsilon}{(-M\Omega^2 + k)} = \frac{M\Omega^2\varepsilon}{(-M\Omega^2 + k)} : \frac{M}{M} = \frac{\Omega^2\varepsilon}{\left(-\Omega^2 + \frac{k}{M}\right)} = \frac{\Omega^2\varepsilon}{(-\Omega^2 + {\omega_0}^2)}$$

Dividendo ora $\overrightarrow{z_p}$ per l'eccentricità è possibile ottenere:

$$A(\Omega) = \frac{\overrightarrow{z_p}}{\varepsilon} = \frac{\Omega^2}{(-\Omega^2 + {\omega_0}^2)} = \frac{1}{\frac{{\omega_0}^2}{\Omega^2} - 1}$$

Questa funzione presenta un punto di discontinuità nel quale la funzione tende all'infinito, per $\Omega = \omega_0$: in questo caso le vibrazioni flessionali raggiungono la condizione di risonanza a velocità critica flessionale e dunque la velocità angolare è uguale ad una delle frequenze proprie del rotore. Analizziamo ora i tre diversi possibili casi:

- $A(\Omega) > 0 \quad \rightarrow \quad \Omega < \omega_0$: forzamento quasistatico. In questo caso l'eccentricità è allineata con lo spostamento. Al di sotto della risonanza dunque la forzante risulta in fase con la vibrazione ossia $\vec{\varepsilon}$ e $\vec{z}$ sono allineati ed equiversi e quindi si mantiene l'allineamento tra il baricentro e l'asse di rotazione. In questo caso si parla di comportamento a rotore rigido.

- $A(\Omega) = \infty \quad \rightarrow \quad \Omega = \omega_0$: risonanza. In questo caso le vibrazioni avvengono lungo la direzione di flessione. In condizione di risonanza, $\vec{z}$ è disposto in ritardo di 90° rispetto al vettore $\vec{\varepsilon}$ con modulo $|\vec{z}|$ tendente per l'assenza di smorzamento ad ampiezza infinita, questa condizione è quella che porta alla rottura del rotore nel caso di permanenza nella velocità critica flessionale.
- $A(\Omega) < 0 \quad \rightarrow \quad \Omega > \omega_0$: in questa zona, al di sopra della risonanza $\vec{\varepsilon}$ e $\vec{z}$ tornano ad essere allineati ma in opposizione di fase. In tale condizione per $\Omega \rightarrow \infty$ il modulo dell'ampiezza di oscillazione $|\vec{z}|$ tende ad $\vec{\varepsilon}$ cioè l'albero tende ad autocentrarsi. Generalmente si cerca di lavorare in questa condizione. In questo caso si parla di comportamento a rotore deformabile.

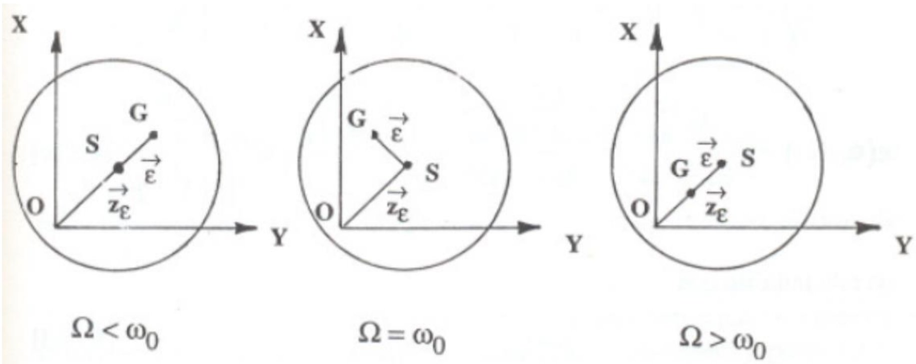


Fig. 6.23 - Risposta di un rotore allo squilibrio al variare del rapporto tra velocità angolare Ω e pulsazione propria del sistema ω_0.

Rotore di Jeffcott: con smorzamento

È possibile impostare l'equilibrio dinamico e ottenere dunque l'equazione di moto qualora ci fosse smorzamento:

$$M\overrightarrow{\ddot{z}_G} + r\dot{z} + k\vec{z} = \vec{P}$$

Per risolvere tale equazione procediamo come segue:

- Integrale particolare = definisce il contributo della forza peso:

$$\overrightarrow{z_G} = \frac{M\vec{g}}{k}$$

- Integrale generale (è sempre particolare: è generale quando si studia l'equazione libera, mentre è particolare se si sceglie una soluzione simile alla forzante) = impongono una soluzione che abbai la stessa forma della forzante:

$$\overrightarrow{z_p}(t) = \overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t}$$

$$\overrightarrow{\dot{z}_p}(t) = i\Omega\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t}$$

$$\overrightarrow{\ddot{z}_p}(t) = -\Omega^2\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t}$$

Sostituisco questa soluzione all'equazione vettoriale priva del contributo della forza peso:

$$M\overrightarrow{\ddot{z}_G} + r\dot{z} + k\vec{z} = 0$$

$$M\left(\ddot{\vec{z}} - \Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t}\right) + r\dot{z} + k\vec{z} = 0$$

$$M\left(-\Omega^2\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} - \Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t}\right) + ri\Omega\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} + k\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} = 0$$

$$-M\Omega^2\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} - M\Omega^2\varepsilon e^{i\Omega t} + ri\Omega\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} + k\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} = 0$$

$$(-M\Omega^2 + ri\Omega + k)\overrightarrow{z_p}e^{i\Omega t} = M\Omega^2 \varepsilon e^{i\Omega t}$$

$$(-M\Omega^2 + ri\Omega + k)\overrightarrow{z_p} = M\Omega^2 \varepsilon$$

$$\overrightarrow{z_p} = \frac{M\Omega^2\varepsilon}{(-M\Omega^2 + ri\Omega + k)} = \frac{M\Omega^2\varepsilon}{(-M\Omega^2 + ri\Omega + k)} : \frac{M}{M} = \frac{\Omega^2\varepsilon}{\left(-\Omega^2 + \frac{ri\Omega}{M} + \frac{k}{M}\right)} : \frac{\Omega^2\varepsilon}{\Omega^2\varepsilon} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{ri}{M\Omega\varepsilon} + \frac{k}{M\Omega^2\varepsilon}\right)}$$

Dividendo ora $\overrightarrow{z_p}$ per l'eccentricità è possibile ottenere:

$$\frac{\overrightarrow{z_p}}{\varepsilon} = \frac{1}{\left(-1 + \frac{ri}{M\Omega} + \frac{k}{M\Omega^2}\right)} = \frac{1}{\left(-1 + \frac{k}{M\Omega^2}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{r}{M\Omega}\right)i}$$

Il cui modulo è:

$$A_r(\Omega) = \left|\frac{\overrightarrow{z_p}}{\varepsilon}\right| = \sqrt{\frac{1}{\left(-1 + \frac{k}{M\Omega^2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{r}{M\Omega}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(-1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{r}{M\Omega}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(-1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2r\omega_0}{2M\Omega\omega_0}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1\right)^2 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2}}$$

Moltiplico e divido per 2 e per ω_0

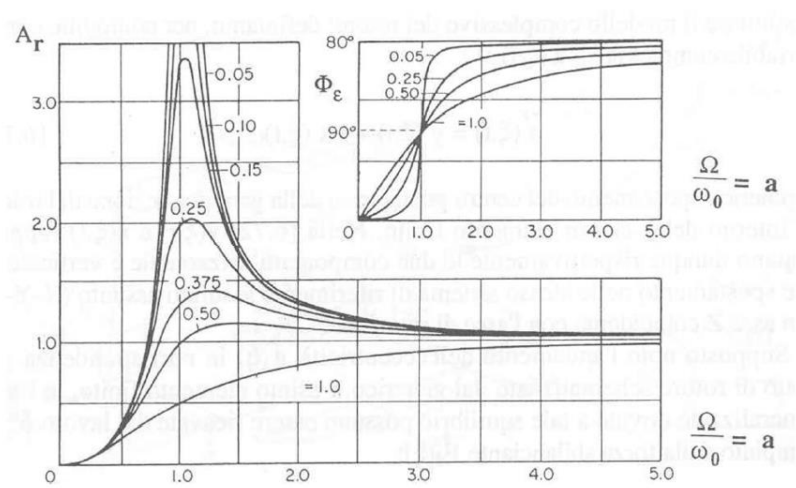
Sapendo che:

$$a = \frac{\Omega}{\omega_0} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\frac{r}{2M\omega_0} = h = \frac{r}{r_{cr}}$$

Disegnano l'andamento di $A_r(\Omega)$ e analizzando il grafico si può notare che:

- $a \ll 1 \quad \rightarrow \quad \Omega \ll \omega_0 \quad \rightarrow \quad \phi_e(\Omega) \cong 0° \quad \rightarrow \quad A_r(\Omega) \cong 0$
- $a = 1 \quad \rightarrow \quad \Omega = \omega_0 \quad \rightarrow \quad \phi_e(\Omega) \cong 90° \quad \rightarrow \quad A_r(\Omega) \cong \frac{1}{2h}$
- $a \gg 1 \quad \rightarrow \quad \Omega \gg \omega_0 \quad \rightarrow \quad \phi_e(\Omega) \cong 180° \quad \rightarrow \quad A_r(\Omega) \cong 1$



Equilibramento

Per evitare i problemi legati allo squilibrio si utilizza una massa (o più in punti diversi) di equilibramento. Per poter dimensionare la massa di equilibramento, il metodo più utilizzato è quello dei coefficienti di influenza. Dal momento che non è possibile definire la reale distribuzione delle oscillazioni, per poter procedere con il bilanciamento occorre determinare sperimentalmente l'ampiezza delle vibrazioni da bilanciare. Per fare ciò occorre utilizzare dei sensori adeguati e posizionati correttamente. Se il posizionamento viene effettuato in modo corretto è possibile determinare il vettore $\vec{V}$ (delle oscillazioni del rotore) e l'intervallo temporale di misurazione Δt e il periodo della vibrazione T_0, è dunque possibile calcolare lo sfasamento ϕ (calcolato stimando l'angolo tra il punto più oscillante e una tacca riflettente posta sul rotore, usata come riferimento):

$$\phi = \frac{\Delta t}{T_0} 360°$$

Sapendo che il segnale misurato è periodico e noto sia il modulo che lo sfasamento di può ottenere:

$$V(t) = |\vec{V}| \cos(\Omega t + \phi)$$

In questo modo dunque è possibile determinare le vibrazioni $\vec{V}^{(s)}$ causate dallo squilibrio:

$$\vec{V}^{(s)} = V^{(s)} e^{i\phi_s}$$

A questo punto si ferma la rotazione del rotore e si posiziona una generica massa m_j a una distanza nota ε_j (generalmente viene posta sulla superficie esterna del rotore, perché dentro il rotore è complicato metterla) dall'asse di rotazione e in una certa posizione angolare nota γ_j (questa posizione è in corrispondenza del punto più vibrante). È dunque possibile definire il vettore che identifica questa massa sul rotore come:

$$\overrightarrow{m_j} = m_j e^{i\gamma_j}$$

Posizionata la massa di rimette il rotore in rotazione e si misura il nuovo vettore $\vec{V}^{(s+m_j)}$ che misura le vibrazioni dovute sia allo squilibrio iniziale sia allo squilibrio dovuto alla massa m_j. Questo vettore avrà posizione angolare ϕ_{sj} differente dal caso precedente ϕ_s:

$$\vec{V}^{(s+m_j)} = V^{(s+m_j)} e^{i\phi_{sj}}$$

Assumendo che il rotore abbia un comportamento lineare e quindi sia possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e assumendo la ripetibilità delle misurazioni è possibile definire un nuovo vettore $\overrightarrow{W_j}$ che identifichi le vibrazioni introdotte solo dalla massa m_j:

$$\overrightarrow{W_j} = \vec{V}^{(s+m_j)} - \vec{V}^{(s)}$$

Dividendo questo vettore per la massa m_j è possibile definire il coefficiente di influenza che può essere considerato come l'effetto della massa m_j con modulo unitario:

$$\vec{\alpha}_j = \frac{\overrightarrow{W_j}}{\overrightarrow{m_j}}$$

Il rotore sarà bilanciato quando il vettore $\vec{V}^{(s)}$ sarà uguale al vettore $\overrightarrow{W_j}^*$ (cioè quando $\vec{V}^{(s+m_j)}$ risulta nullo, ovvero le vibrazioni dopo l'aggiunta della massa m_j sono nulle) generato da una massa ignota $\overrightarrow{m_j}^*$, che può ora essere calcolata impostando questa equazione:

$$\vec{V}^{(s)} + \overrightarrow{W_j} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{V}^{(s)} + \vec{\alpha}_j \overrightarrow{m_j}^* = 0$$