Equazioni non lineari (zeri di una funzione)

Convergenza metodo iterativo per la ricerca dello zero di una funzione: un metodo iterativo per la ricerca dello zero α di una funzione $f(x)$ converge con ordine P se:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^P} = \mu$$

Metodo di bisezione

Criterio d'arresto: $\tilde{e}^{(k)} = \frac{b-a}{2^{k+1}} < toll$ oppure $\tilde{e}^{(k)} = r^{(k)} = |f(x)|$

Numero minimo di iterazione: $k_{min} > \log_2\left(\frac{b-a}{toll}\right) - 1$

Per $k = 0$

$$a^{(0)} = a$$
$$b^{(0)} = b$$
$$x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$$

Per $k = 1,2, \dots (crit.arresto)$:

- Se $f\left(x^{(k-1)}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = x^{(k-1)} \quad \to stop$
- Se $f\left(x^{(k-1)}\right) f\left(a^{(k-1)}\right) < 0 \quad \Longrightarrow \quad a^{(k)} = a^{(k-1)}, \; b^{(k)} = x^{(k-1)}$
- Se $f\left(x^{(k-1)}\right) f\left(b^{(k-1)}\right) < 0 \quad \Longrightarrow \quad a^{(k)} = x^{(k-1)}, \; b^{(k)} = b^{(k-1)}$

$$x^{(k)} = \frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$$

```
function [ xvect, it ] = bisez( a,b,toll,f )

it = -1;
xvect = [];
err = 100;
nmax = ceil (log2((b-a)/toll)-1);

fprintf('Il massimo numero di iterazioni ammissibili è
%d \n', nmax);

while it<nmax && err>toll
    it = it+1;
    x = (b+a)/2;
    if f(x)==0
        err=0;
    else
        err = abs(f(x)); %criterio residuo relativo
        % err = (b-a)/2^it; criterio più corretto
    end
    xvect = [xvect;x];

    if f(x)*f(a)>0
        a = x;
    else
        b = x;
    end
end

if it == nmax
    fprintf ('Attenzione: è stato raggiunto il massimo
numero di iterazioni')
```

```
else
    fprintf('il numero di iterazioni è %d \n',it);
end

fprintf('La radice calcolata è %d', xvect(end));

end
```

Metodo di Newton modificato

Molteplicità:

- $m = 1$ se e solo se $f(\alpha) = 0$ mentre $f'(\alpha) \neq 0$
- $m \geq 1$ se e solo se $f(\alpha) = f'^{(\alpha)} = 0$

Se $m = 1$ si ha il metodo di Newton classico

Convergenza del metodo di Newton e Newton modificato: il metodo di Newton converge se l $f'^{(x^{(k)})} \neq 0 \quad \forall k$ (condizione che se non è verificata comporta l'inapplicabilità del metodo stesso) e a patto di scegliere un $\vec{x}^{(0)}$ "sufficientemente" vicino alla soluzione. Per questo motivo, al fine di scegliere un $\vec{x}^{(0)}$ "sufficientemente" vicino alla soluzione lo si può determinare con il metodo della bisezione. Convergono con ordine $p = 2$.

Criterio d'arresto: $\tilde{e}^{(k)} = \begin{cases} \left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| & k \geq 1 \\ toll + 1 & k = 0 \end{cases}$

Dato $\quad \vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Per $k = 0,1,,\ldots (crit. arresto)$: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$

```
function [ xvect, niter] = metnewton( f, df, toll, x0,
maxiter,mol )

xvect = [];
niter = 0;
err = 1;

while (niter< maxiter && err> toll)
   dfx = df(x0);
   if dfx == 0
      error(' Arresto per azzeramento di dfun');
   else
      x = x0 - mol*f(x0)/dfx;
      err = abs(x-x0);
      xvect = [xvect; x];
      niter = niter+1;
      x0 = x;
   end
end

if (niter < maxiter)
    fprintf(' Convergenza al passo k : %d \n',niter);
else
    fprintf(' E` stato raggiunto il numero massimo di
passi k : %d \n',niter);
end

end
```

Metodo di Newton per sistemi non lineari	``` function [x, res, niter] = netsis(F, JF, x0, toll, maxiter) x = x0; niter = 0; err = toll + 1; while niter<maxiter && err>toll delta = -JF(x)\F(x); x = x + delta ; err = norm (delta); niter = niter + 1; end res = norm (F(x)); if niter ==maxiter && err>toll fprintf('Il metodo non converge nel massimo numero di iterazioni') else fprintf('Il metodo coverge nel massimo numero di iterazioni') end end ```
Iterazioni di punto fisso	<u>Metodo iterazione di punto fisso</u>: si vuole risolvere l'equazione non lineare $f(x) = 0$ riconducendoi al problema della ricerca del punto fisso di una funzione $y = g(x)$, cioè si vuole trovare un α tale che: $$f(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(\alpha) = \alpha$$ <u>Interpretazione grafica</u>: graficamente si cercano le intersezione di $y = g(x)$ con la bisettrice del primo e terzo quadrante: $$\begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}$$ <u>Convergenza globale in un intervallo</u>: se $\phi \in C^1([a,b])$, $\phi \in [a,b]$, $\|\phi'(\alpha)\| < 1$ e allora esiste un unico punto fisso e l'algoritmo converge ad α almeno linearmente ovvero: $$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha)$$ <u>Convergenza locale</u>: se $\phi \in C^1(I_\alpha)$, con I_α intorno del punto fisso, $\|\phi'(\alpha)\| < 1$ e $x^{(0)}$ è "sufficientemente" vicino ad α allora il metodo di iterazione di punto fisso converge ad α con ordine almeno uguale a 1 ovvero: $$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha)$$ <u>Criterio d'arresto</u>: $\tilde{e}^{(k)} = \|\delta^{(k)}\| = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$
	Dato $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ Per $k = 0,1,,\ldots (crit. arresto)$: $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$

Adeguatezza criterio delle differenza tra iterate successive per metodo iterazione di punto fisso

<u>Enunciato</u>: per valutare l'errore nel metodo di iterazione di punto fisso occorre utilizzare lo stimatore dell'errore. Tale stimatore può essere determinato in diversi modi, uno dei quali è proprio la differenza tra iterate successive ovvero:

$$\tilde{e}^{(k)} = \left|\delta^{(k)}\right| = \left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|$$

Si vuole ora dimostrare quando questo criterio è soddisfacente, ovvero si vuole trovare una relazione che leghi lo stimatore dell'errore definito in questo modo con l'errore stesso.
<u>Dimostrazione</u>: per definizione di errore al passo $k+1$ è possibile scrivere:

$$e^{(k+1)} = \alpha - x^{(k+1)} =$$

$$= \alpha - x^{(k)} - x^{(k+1)} + x^{(k)} =$$

$$= \alpha - x^{(k)} - \delta^{(k)}$$

$\alpha = \phi(\alpha)$ per definizione di punto fisso

$x^{(k+1)} = \phi\left(x^{(k)}\right)$ per algoritmo iterazione punto fisso

È inoltre possibile riscrivere l'errore in quest'altro modo:

$$e^{(k+1)} = \alpha - x^{(k+1)} =$$

$$= \phi(\alpha) - \phi\left(x^{(k)}\right) =$$

$$= \phi'\left(\xi^{(k)}\right)\left(\alpha - x^{(k)}\right)$$

Per teorema valore medio di Lagrange: $f C^1[a,b]$ allora esiste un punto $\xi \in (a,b)$ tale che

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b)$$

Eguagliando queste due soluzioni si ha:

$$\alpha - x^{(k)} - \delta^{(k)} = \phi'\left(\xi^{(k)}\right)\left(\alpha - x^{(k)}\right)$$

$$\alpha - x^{(k)} = \phi'\left(\xi^{(k)}\right)\left(\alpha - x^{(k)}\right) + \delta^{(k)}$$

$$\alpha - x^{(k)} = \alpha\phi'\left(\xi^{(k)}\right) - x^{(k)}\phi'\left(\xi^{(k)}\right) + \delta^{(k)}$$

$$\alpha - x^{(k)} - \alpha\phi'\left(\xi^{(k)}\right) + x^{(k)}\phi'\left(\xi^{(k)}\right) = \delta^{(k)}$$

$$\left(1 - \phi'\left(\xi^{(k)}\right)\right)\alpha - x^{(k)}\left(1 - \phi'\left(\xi^{(k)}\right)\right) = \delta^{(k)}$$

$$\left(1 - \phi'\left(\xi^{(k)}\right)\right)\left(\alpha - x^{(k)}\right) = \delta^{(k)}$$

$\alpha - x^{(k)} = e^{(k)}$

$$\alpha - x^{(k)} = \frac{\delta^{(k)}}{1 - \phi'(\xi^{(k)})}$$

$$e^{(k)} = \frac{1}{1 - \phi'(\xi^{(k)})}\delta^{(k)}$$

$$e^{(k)} = \frac{1}{1 - \phi'(\alpha)}\tilde{e}^{(k)}$$

Quindi:
- Se $\phi'(\alpha) \cong 0$ $\rightarrow$ $\vec{e}^{(k)} \cong \tilde{e}^{(k)}$ $\rightarrow$ criterio soddisfacente
- Se $\phi'(\alpha) \lesssim 1$ $\rightarrow$ $\vec{e}^{(k)} \gg \tilde{e}^{(k)}$ $\rightarrow$ criterio insoddisfacente
- Se $\phi'(\alpha) \gtrsim 1$ $\rightarrow$ $\vec{e}^{(k)} \cong \frac{1}{2}\tilde{e}^{(k)}$ $\rightarrow$ criterio soddisfacente anche se l'errore è sovrastimato

Metodo di Newton come metodo di iterazione di punto fisso

Enunciato: Il metodo di Newton può essere considerato un particolare metodo di iterazione di punto fisso

Dimostrazione: per definizione l'iterata al passo $k+1$ con il metodo di iterazione di punto fisso è:

$$x^{(k+1)} = \phi\left(x^{(k)}\right)$$

Mentre Newton è:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}$$

Dunque, può essere vista come un particolare metodo di iterazione di punto fisso: $\phi_N\left(x^{(k)}\right) = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}$. Tutti i risultati di convergenza del punto fisso possono essere utilizzati anche per Newton.