DINAMICA DEI FLUIDI

Introduzione

Se nella statica non avevamo di fatto preso in considerazione il bilancio di massa cioè il principio di conservazione della massa, nella dinamica risulta essere un aspetto importante di cui tener conto. Essendo la massa una quantità scalare, vedremo che tale bilancio si ridurrà ad una equazione scalare detta equazione di continuità. L'equazione di continuità può essere espressa in forma indefinita (nella quale compaiono quantità locali) o globale. A sua volta la forma indefinita può essere espressa usando un punto di vista Lagrangiano o Euleriano. Un caso particolare di equazione di continuità può essere ricavato per le correnti, definire, genericamente, come un fascio di linee di corrente tra di loro quasi-parallele. Ci limiteremo qui ad analizzare il caso di fluidi non reattivi, cioè fluidi che non subiscono reazioni chimiche e/o nucleari.

Bilancio di massa: forma indefinita lagrangiana

Il bilancio di massa per una particella di fluido non reattivo afferma, semplicemente, che la sua massa m si deve conservare, cioè che la sua derivata sostanziale nel tempo deve essere pari a zero. In termini matematici:

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

La massa è una grandezza estensiva, per comodità la esprimiamo come grandezza intensiva mediante la seguente relazione:

$$M = \rho W$$

$$\frac{d(\rho W)}{dt} = \frac{dW}{dt}\rho + \frac{d\rho}{dt}W = 0$$

Quest'ultima equazione è nota come equazione di continuità in forma lagrangiana indefinita. Sviluppando tale equazione si ottiene:

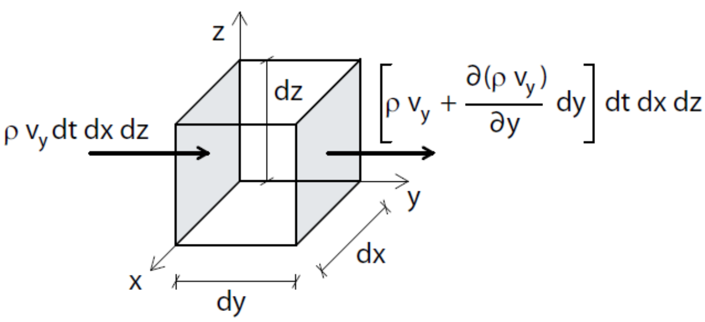
$$\frac{dW}{dt}\rho\frac{1}{W} + \frac{d\rho}{dt}W\frac{1}{W} = 0$$

$$\rho\frac{1}{dt}\frac{dW}{W} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{dt}\frac{dW}{W} = variazione\ percentuale\ di\ volume$$

Bilancio di massa: forma indefinita euleriana

Per la derivazione del bilancio di massa in forma euleriana analizziamo ora il seguente volume di controllo infinitesimo:



Per definizione è possibile esprimere la massa accumulata in due diversi modi:

- Differenza tra massa entrante e massa uscente = questa definizione tiene conto dell'aspetto dinamico (infatti nell'equazione è presente la velocità). Per due facce parallele si ha che:

$$massa\ entrante = \rho v_y dtdzdx$$

$$massa\ uscente = \rho v_y dtdzdx + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dydtdxdz$$

$$massa\ accumulata = \rho v_y dtdzdx - \left(\rho v_y dtdzdx + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dydtdxdz\right) = -\frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dydtdxdz$$

Ripetendo questo ragionamento per le altre 2 facce è possibile ricavare

$$massa\ entrante\ tot - massa\ uscente\ tot = -\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dydtdxdz - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dydtdxdz - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dydtdxdz =$$

$$= -\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right) dydtdxdz$$

- Differenza tra massa iniziale e massa finale = questa definizioni tiene conto solo dell'aspetto statico infatti non è presente il contributo della velocità:

$$massa\ inziale = \rho dxdydz$$

$$massa\ finale = \rho dxdydz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dydtdxdz$$

$$massa\ accumulata = \left(\rho dxdydz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dydtdxdz\right) - \rho dxdydz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dydtdxdz$$

Eguagliamo i due termini di massa accumulata ottenuti con le due differenti definizioni si ha:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dydtdxdz = -\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right) dydtdxdz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \overline{v})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overline{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \overline{v} = 0$$

Questa equazione è nota invece come equazione di continuità in forma euleriana indefinita. Cerchiamo ora di capire come passare da questa forma a quella ottenuta precedentemente cioè quella lagrangiana indefinita:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overline{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \overline{v}$$

Bilancio di massa in forma indefinita per un fluido incomprimibile

Nel fluido incomprimibile per definizione la densità ρ è costante quindi le forme euleriane e lagrangiane indefinite si semplificano:

- Lagrangiana:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\nabla\cdot\overline{v}=0$$

$$\nabla\cdot\overline{v}=0$$

- Euleriana

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\overline{v})=0$$

$$\nabla\cdot\overline{v}=0$$

Il volume dunque di un fluido incomprimibile rimane sempre costante e quindi il moto è isocoro.

$$\nabla\cdot\overline{v}=0$$

Bilancio di massa: forma globale

Fino ad ora abbiamo visto le equazioni di continuità in forma indefinita, ricaviamo ora quelle in forma globale, integrando di fatto quelle indefinite:

$$\int_W\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\overline{v})\right]=0$$

$$\int_W\frac{\partial\rho}{\partial t}dW+\int_W\nabla\cdot(\rho\overline{v})dW=0$$

Il primo termine di questa espressione è noto come termine di accumulo perché, essendo W fisso nello spazio e nel tempo si può applicare il teorema di Leibnitz ottenendo che:

$$\int_W\frac{\partial\rho}{\partial t}dW=\frac{\partial}{\partial t}\int_W\rho dW=\frac{\partial M}{\partial t}$$

Il secondo termine invece è noto come termine di flusso di massa o portata massica e si semplifica applicando il teorema della divergenza:

$$\int_W\nabla\cdot(\rho\overline{v})dW=\int_W\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}dW=-\int_A\rho v_jn_jdA=-\int_A\rho(\bar{v}\cdot\hat{n})dA$$

Dove A è la superficie di contorno del volume W. Suddividiamo ora la superficie di contorno in due porzioni: una che denominiamo A_e, per la quale il prodotto $\bar{v}\cdot\hat{n}$ è positivo (la massa sta entrando nel volume) e una denominata A_u per la quale il prodotto $\bar{v}\cdot\hat{n}$ è negativo (la massa sta uscendo dal volume). L'equazione può quindi essere riscritta come:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_W\rho dW\right)=\int_A\rho(\bar{v}\cdot\hat{n})dA=\int_{A_e}\rho(\bar{v}\cdot\hat{n})dA+\int_{A_u}\rho(\bar{v}\cdot\hat{n})dA=\dot{M}_e-\dot{M}_u$$

Dove $\dot{M}_e$ e $\dot{M}_u$ sono le portate massiche entranti ed uscenti.

Bilancio di massa in forma globale per un fluido incomprimibile

Nel fluido incomprimibile per definizione la densità ρ è costante e dunque l'equazione globale del bilancio di massa si semplificherà come segue, ottenendo che la portata volumetrica entrate eguaglia quella uscente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_W \rho dW\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_W \rho dW\right) = \int_{A_e} \rho(\bar{v}\cdot\hat{n})dA + \int_{A_u} \rho(\bar{v}\cdot\hat{n})dA = \rho\int_{A_e} (\bar{v}\cdot\hat{n})dA + \rho\int_{A_u} (\bar{v}\cdot\hat{n})dA = 0$$

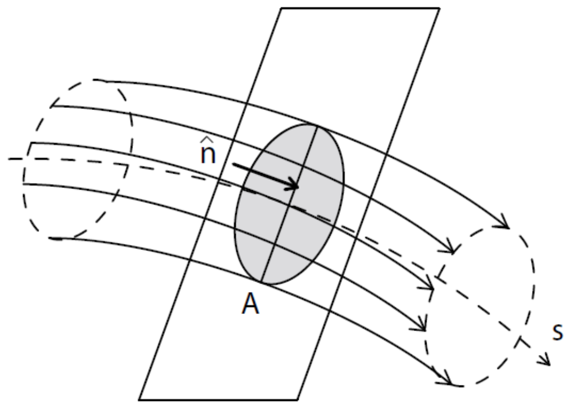
$$\int_{A_e} (\bar{v}\cdot\hat{n})dA = \dot{Q}_e$$

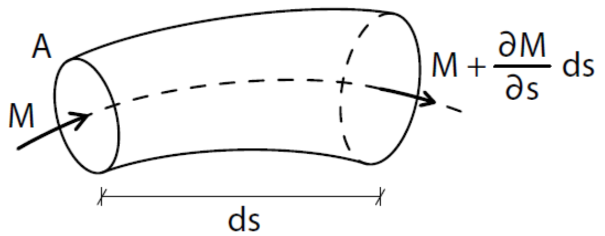
$$\int_{A_u} (\bar{v}\cdot\hat{n})dA = -\dot{Q}_u$$

$$\dot{Q}_e - \dot{Q}_u = 0$$

Bilancio di massa: correnti

Come già accennato le correnti sono un insieme di linee di corrente quasi parallele tra loro (ciò vuol dire che esiste una linea preferenziale del moto). Ipotizzando di tagliare tale fascio con una superficie piana è possibile distinguere, per ogni punto di intenzione tra tale sezione e la singola linea di corrente, due diverse componenti della velocità; una componente $\hat{n}$ e una componente $\hat{t}$. SI può quindi ottenere la media areale sulla sezione delle componenti della velocità normali e tangenziali. Se la velocità media tangenziale è pari a zero, la sezione si dice trasversale al flusso. Il luogo dei punti costituiti dai baricentri delle infinite sezioni trasversali è l'asse della corrente. Lungo l'asse si definisce un'ascissa curvilinea s che individua la direzione del flusso. La dimensionalità spaziale del problema, nel caso delle correnti, può essere ridotta calcolando, per qualsiasi grandezza di interesse, la media areale sulla sezione trasversale e assegnando tale valore (istantaneo) alla coordinata s di quella particolare sezione. Il moto si riduce, allora, a mono-dimensionale (ogni grandezza può variare nel tempo e lungo la coordinata spaziale s), con non trascurabili benefici dal punto di vista concettuale e computazionale.





Consideriamo ora un tronco di corrente di lunghezza infinitesima ds compreso tra due sezioni trasversali. Chiamiamo A la superficie della sezione trsversale con normale concorde al vettore velocità media. Possiamo quindi definire:

- Massa entrante $\dot{M}dt$
- Massa uscente (sfruttiamo la meccanica del continuo) $\left(\dot{M} + \frac{\partial \dot{M}}{\partial s}ds\right)dt$
- Massa iniziale $\rho A ds$
- Massa finale $\rho A ds + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t}dtds$

Possiamo quindi scrivere che:

$$massa\ entrante - massa\ uscente = massa\ finale - massa\ iniziale$$

$$\dot{M}dt-\left(\dot{M}+\frac{\partial\dot{M}}{\partial s}ds\right)dt=\rho Ads+\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}dtds-\rho Ads$$

$$-\frac{\partial\dot{M}}{\partial s}dsdt=\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}dtds$$

$$-\frac{\partial\dot{M}}{\partial s}=\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}+\frac{\partial\dot{M}}{\partial s}=0$$

Abbiamo così ottenuto l'equazione di continuità per le correnti di un fluido qualsiasi. Se il fluido è caratterizzato dal moto stazionario allora si ha che:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\dot{M}}{\partial s}=0 \quad \rightarrow \quad \dot{M}=cost\ lungo\ la\ coordinata\ s$$

Se invece si ha a che fare con un fluido incomprimibile si può scrivere la portata massica come prodotto tra quella volumetrica per la densità e di può quindi portare fuori dalla derivata la densità ottenendo:

$$\dot{M}=\ \rho\dot{Q}$$

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}+\rho\frac{\partial\dot{Q}}{\partial s}=0$$

$$\rho\frac{\partial A}{\partial t}+\rho\frac{\partial\dot{Q}}{\partial s}=0$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial\dot{Q}}{\partial s}=0$$

Se l'area A è costante perché si ha un'area rigida di contorno e/o un moto stazionario si ha che;

$$\frac{\partial A}{\partial t}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\dot{Q}}{\partial s}=0 \quad \rightarrow \quad \dot{Q}=cost\ lungo\ la\ coordinata\ s$$

Dal bilancio di massa al bilancio di quantità di moto

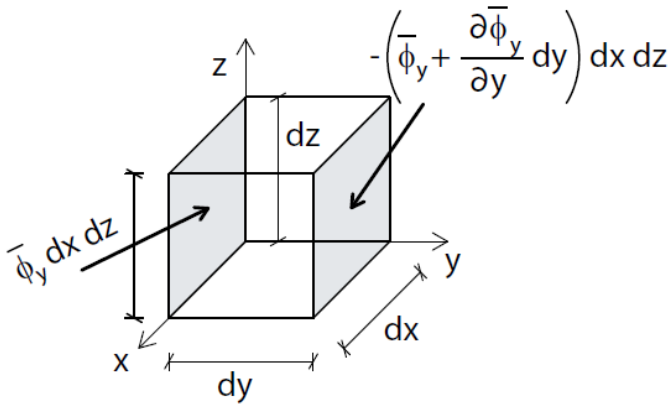
L'equazione di continuità da sola non è sufficiente a determinare una soluzione al moto dei fluidi. Rappresenta, infatti, una equazione scalare nelle quattro incognite costituite dalla densità e dalle tre componenti della velocità. Ad essa devono, dunque, essere affiancate altre equazioni di bilancio. Nel seguito, analizziamo il bilancio della quantità di moto dei fluidi, in forma indefinita e globale, che non è altro che la seconda legge della dinamica o seconda legge di Newton. Essendo la quantità di moto un vettore, il bilancio di quantità di moto è un'equazione vettoriale che corrisponde a tre equazioni scalari.

Bilancio di quantità di moto: forma indefinita

Prendiamo il solito volume infinitesimo di fluido dW. Per questo volumetto la seconda lege della dinamica afferma che la somma delle forze esterne agenti sul volume deve eguagliare la forza di inerzia:

$$\sum\overline{F_{ext}}=\overline{F_{in}}$$

Ricordandoci che la forza esterna è la somma delle forze di superficie e quella di volume si ha che:



$$\sum \overline{F_{ext}} = \overline{F_s} + \overline{F_v}$$

$$\overline{F_s} + \overline{F_v} = \overline{F_{in}}$$

Analizzando ora il nostro volumetto otteniamo:

$$\overline{F_v} = \rho \bar{f} dxdydz$$

$$\overline{F_{in}} = m\bar{a} = \rho dxdydz\bar{a}$$

Per ricavare la forza si superficie che agisce sul volumetto analizziamo le facce del volume a due a due quindi scriviamo la forza di superfice che agisce sulla prima faccia della coppia analizzata, poi sulla seconda e infine ricaviamo la forza di superficie totale che agisce su queste due facce considerate:

$$\overline{F_{s(f1)}} = \overline{\phi_y} dxdz$$

$$\overline{F_{s(f2)}} = -\left(\overline{\phi_y} + \frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial y} dy\right) dxdz$$

$$\overline{F_{s(f2)}} - \overline{F_{s(f1)}} = -\left(\overline{\phi_y} + \frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial y} dy\right) dxdz + \overline{\phi_y} dxdz = -\frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial y} dydxdz$$

Calcoliamo ora la forza si superficie totale per l'interno volumetto:

$$\overline{F_s} = -\frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial y} dydxdz - \frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial x} dydxdz - \frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial z} dydxdz$$

Riscriviamo il bilancio della quantità di moto:

$$-\frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial y} dydxdz - \frac{\partial \overline{\phi_x}}{\partial x} dydxdz - \frac{\partial \overline{\phi_z}}{\partial z} dydxdz + \rho \bar{f} dxdydz = \rho dxdydz\bar{a}$$

$$-\frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{\phi_x}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\phi_z}}{\partial z} + \rho \bar{f} = \rho \bar{a}$$

$$-\left(\frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\phi_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\phi_z}}{\partial z}\right) + \rho \bar{f} = \rho \bar{a}$$

$$\left(\frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\phi_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\phi_z}}{\partial z}\right) = \nabla \cdot \bar{\bar{\phi}}$$

Divergenza del tensore degli sforzi

$$-\nabla \cdot \bar{\bar{\phi}} + \rho \bar{f} = \rho \bar{a}$$

Questa espressione è l'equazione indefinita di bilancio della quantità di moto per una qualsiasi sostanza, non necessariamente un fluido. Tale legge è il legame costitutivo tra il tensore degli sforzi e le deformazioni (reologia) a specificare il tipo di sostanza cui siamo interessati. Per i fluidi pesanti si ha che:

$$\bar{f} = -g\nabla\tilde{z}$$

$$-\nabla \cdot \bar{\bar{\phi}} - \rho g \nabla \tilde{z} = \rho \bar{a}$$

A seconda di come esprimiamo l'accelerazione, possiamo ottenere la forma euleriana o lagrangiana dell'equazione di bilancio della quantità di moto:

- Lagrangiana:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$-\nabla \cdot \bar{\bar{\phi}} - \rho g \nabla \tilde{z} = \rho \frac{d\bar{v}}{dt}$$

- Euleriana (forma indefinita non-conservativa): usando la regola di derivazione euleriana possiamo passare dalla forma lagrangiana a quella euleriana:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v}$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \cdot \bar{\bar{\phi}}$$

Il primo termine a sinistra dell'uguale rappresenta l'inerzia locale ed è una componente associata all'accelerazione locale. Il secondo termine a sinistra dell'uguale è una componente legata all'accelerazione convettiva ed è nota come inerzia convettiva. Il primo termine a destra dell'uguale invece è un contributo dovuto al peso mentre l'ultimo termine rappresenta il contributo dovuto alle forze di superficie.
È possibile ottenere anche la forma conservativa del bilancio di quantità di moto in forma euleriana aggiungendo dei termini al primo membro.

- Euleriana (forma indefinita conservativa): aggiungiamo al primo membro dell'equazione non conservativa il bilancio di massa in forma indefinita euleriana moltiplicato per $\bar{v}$ (aggiungiamo questa quantità solo a primo membro perché è una quantità che è nulla quindi è come se a secondo membro si sommasse uno zero):

$$\bar{v}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v})\right] = 0$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} + \bar{v}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v})\right] = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \cdot \bar{\bar{\phi}} + 0$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} + \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v} \nabla(\rho \bar{v}) = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \cdot \bar{\bar{\phi}}$$

Usando ora la notazione alla Einstein e sfruttando le proprietà della derivata del prodotto tra due funzioni si ottiene:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \hat{\iota}_i + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \hat{\iota}_i + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \hat{\iota}_i + v_i \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} \hat{\iota}_i = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \bar{\bar{\phi}}$$

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} \hat{\iota}_i + \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \hat{\iota}_i = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \bar{\bar{\phi}}$$

$$\frac{\partial (\rho \bar{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v} \bar{v}) = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \bar{\bar{\phi}}$$

Bilancio di quantità di moto: forma globale

Ricaviamo ora la forma globale integrando sul volume il bilancio di quantità di moto in forma indefinita euleriana conservativa:

$$\int_W \left[\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})\right] dW = \int_W [-\rho g\nabla\tilde{z} - \nabla\bar{\bar{\phi}}]dW$$

$$0 = \int_W [-\rho g\nabla\tilde{z} - \nabla\bar{\bar{\phi}}]dW - \int_W \left[\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla(\rho\bar{v}\bar{v})\right] dW$$

$$0 = \int_W \left[-\rho g\nabla\tilde{z} - \nabla\bar{\bar{\phi}} - \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} - \nabla(\rho\bar{v}\bar{v})\right] dW$$

$$0 = -\int_W \rho g\nabla\tilde{z}dW - \int_W \nabla\bar{\bar{\phi}}dW - \int_W \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t}dW - \int_W \nabla(\rho\bar{v}\bar{v})dW$$

Analizziamo ora i singoli termini che compaiono nell'equazione:

$$-\int_W \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t}dW = Leibneitz = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_W \rho\bar{v}dW\right) = \bar{I}$$

$$-\int_W \nabla(\rho\bar{v}\bar{v})dW = -\int_W \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j}\hat{\imath_i}dW = teo\ divergenza = \int_A \rho v_i v_j n_j\,\hat{\imath_i}dA = \int_A \rho\bar{v}(\bar{v}\hat{n})\,dA = \bar{M}$$

$$-\int_W \rho g\nabla\tilde{z}dW = -g\nabla\tilde{z}\int_W \rho dW = \bar{G}$$

$$-\int_W \nabla\bar{\bar{\phi}}dW = -\int_W \frac{\partial\overline{\phi_J}}{\partial x_j}dW = teo\ divergenza = \int_A \overline{\phi_J}n_j dA = \int_A \overline{\phi_n}dA = \bar{\Pi}$$

Otteniamo quindi la forma globale come:

$$\bar{I} + \bar{M} + \bar{G} + \bar{\Pi} = \bar{0}$$

dove:

- $\bar{I}$ vettore inerzie locali
- $\bar{M}$ flusso di quantità di moto. Ha un'origine inerziale ed è sempre entrante
- $\bar{G}$ forza peso del fluido contenuto nel volume di controllo
- $\bar{\Pi}$ risultante degli sforzi

Bilancio del momento della quantità di moto

Finora abbiamo così ricavato 1 equazione scalare di continuità (bilancio di massa), e tre equazioni scalari dal bilancio di quantità di moto. Le incognite del problema sono però 13: la densità, le tre componenti del vettore velocità e le nove componenti del tensore degli sforzi. Quindi abbiamo 4 equazioni scalari in 13 incognite, chiaramente il problema non è chiuso. Potremmo pensare di aggiungere l'equazione di stato ma in questo moto introdurremo un'altra incognita ovvero la pressione per cui il problema continuerebbe a non essere chiuso. Per rendere il problema risolvibile occorre introdurre i legami costituivi (detti anche equazioni reologiche) ovvero delle relazioni che legano gli elementi del tensore degli sforzi alle deformazioni del fluido; queste relazioni sono esattamente 9 quindi riusciamo a risolvere il problema perché abbiamo 13 equazioni e 13 incognite.

Bilancio di massa	1 equazione scalare	Densità, 3 componenti della velocità
Bilancio quantità di moto	3 equazioni scalari	Densità, 3 componenti della velocità, 9 componenti del tensore degli sforzi
Bilancio del momento della quantità di moto	9 equazioni scalari	9 componenti del tensore degli sforzi