Capitolo 3. Reti in regime sinusoidale

Esercizio 3.1

Dato il circuito in figura 3.1, sono noti:

R = 8 Ω, L = 10 mH, C = 100µF.
v(t) = 50·cos(300·t+π/6) V

Determinare la corrente , le tensioni sul resistore, sul condensatore e sull'induttore nel dominio del tempo ed in quello fasoriale.

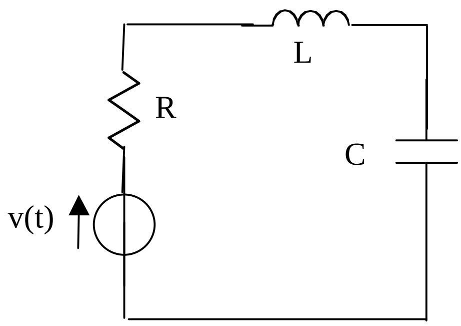

Figura 3.1

Soluzione

E' necessario esprimere la sorgente di tensione nel dominio fasoriale. In tale dominio:

$$\overline{V} = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 30.62 + j17.68 \qquad V.$$

La pulsazione è pari a ω=300 rad/s. Si può ricavare la reattanza induttiva Xl = ω·L = 3 Ω, la reattanza capacitiva è pari a Xc = 1/(ω·C) = 33.33 Ω. Scrivendo la legge alla maglia si ottiene la corrente:

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{R + j(Xl - Xc)} = -0.296 + j1.087$$

La tensione ai capi del resistore è pari a:

$\overline{V} = R \cdot \overline{I} = -2.368 + j8.7V$
la tensione sull'induttore vale:
$\overline{V} = jXl \cdot \overline{I} = -3.262 - j0.888\,V$
la tensione sul condensatore vale:
$\overline{V} = -jXc \cdot \overline{I} = -36.23 + j9.866\,V$. *Per trasformare le grandezze trovate nel dominio del tempo si procede nel medesimo modo per tutte le grandezze. Ad esempio per la corrente si ha:*
i(t) = I_M cos($\omega t+\varphi$), dove $I_M = \sqrt{2}\left(\sqrt{\mathrm{Re}(\overline{I})^2 + \mathrm{Im}(\overline{I})^2}\right)$ *e*
$\varphi = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{I})}{\mathrm{Re}(\overline{I})}\right)$
se la parte reale è positiva e $\varphi = \pi + \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{I})}{\mathrm{Re}(\overline{I})}\right)$ *la parte reale è negativa.*
Si ottiene allora:
i(t) = 1.594·cos(300·t+1.837) A,
vr(t) = 12.751·cos(300·t+1.837) V,
vl(t) = 4.782·cos(300·t+3.407) V,
vc(t) = 53.13·cos(300·t+0.266) V

Esercizio 3.2

Dato il circuito in figura 3.2, sono noti:
I1 = 18 A, X1 = 3 Ω,
R = 4 Ω
Xc = 1 Ω,
ω = 200 rad/s
calcolare $\overline{V}1$ e *v1(t)*

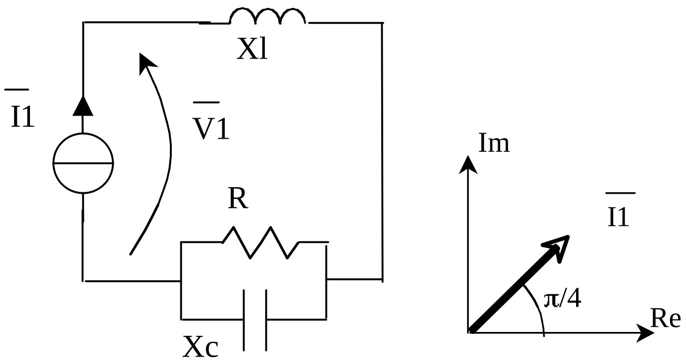

Figura 3.2

Soluzione

Il fasore $\overline{I}1$ *è pari a* $\overline{I}1 = 18 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$ *=18· (cos(π/4)+j·sin(π/4)) = 12.73+j·12.73. R e Xc sono in parallelo di conseguenza equivalgono ad una impedenza* $\overline{Z}$ *= 1/*$\overline{Y}$*, dove* $\overline{Y}$ *= G+(-1/(j·Xc)),* $\overline{Z}$ *= 0.235-j·0.941* **Ω**. *Mentre Xl equivale all'impedenza* $\overline{Z}l = j3\,\Omega$. *La tensione* $\overline{V}1$ *è pari a* $\overline{V}1$ *= (*$\overline{Z} + \overline{Z}l$*)·*$\overline{I}1$ *= -23.22+j28.20 V=37.31·e* $^{j2.24}$ *V. La tensione* $\overline{V}1$ *nel dominio del tempo è pari a v1(t) =*

52.76·cos(200·t+2.24) V. Lo sfasamento di $\bar{I}1$ *rispetto* $\bar{V}1$ *è pari alla differenza della fase della corrente e di quella della tensione:* $\varphi = \pi/4-(2.24) = -1.46$ *rad*

Esercizio 3.3

Dato il circuito in figura 3.3, sono noti:
X1 = 30 Ω, R1 = 7 Ω,
R2 = 10 Ω, Xc = 18 Ω
V1 = 18 V, V2 = 20 V,
δ = π/3
ω = 100 rad/s

Determinare la corrente i(t) e il suo fasore rappresentativo

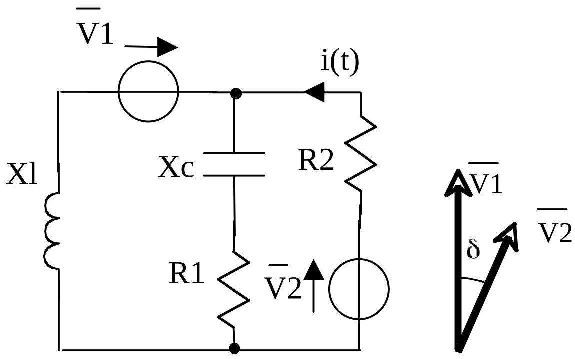

Figura 3.3

Soluzione

Poiché è dato lo sfasamento relativo tra $\bar{V}1$ *e* $\bar{V}2$ *è necessario scegliere dove porre l'asse reale, la scelta migliore consiste nel posizionare tale asse su uno dei due fasori. Se si posiziona l'asse reale coincidente con* $\bar{V}2$ *si ottiene:*
$\bar{V}2 = 20$ *V,* $\bar{V}1 = 18 \cdot e^{j \cdot \delta}$ *V = 9+j·15.59 V.*
A questo punto conviene semplificare la rete di sinistra che comprende V1-X1, R1 – Xc, trasformandolo nel bipolo equivalente serie. La tensione a vuoto può essere calcolata con la regola del partitore di tensione,
Vv = $\bar{V}1$*·(R1-j·Xc)/(j·X1+R1-j·Xc) = 9.174-j·23.28 V.*
L'impedenza equivalente è pari al parallelo di X1 con la serie di R1 e Xc: Zeq = 1/(1/(j·X1)+1/(R1-j·Xc))= 32.64-j·25.96 Ω.
A questo punto il fasore corrente può essere calcolato scrivendo una legge alla maglia e si ottiene:
I = ($\bar{V}2$*-Vv)/(R2+Zeq) = -0.057+j·0.511 A. Tornando nel dominio del tempo si ottiene i(t) = 0.727·cos(100·t+1.682) A*

Esercizio 3.4

Dato il circuito in figura 3.4 sono noti:

I1 = 12 A, I2 = 15 A, E = 18 V
L = 1 H, R = 10 Ω, C = 200 μF
δ = π/6, β = π/4, f = 50 Hz

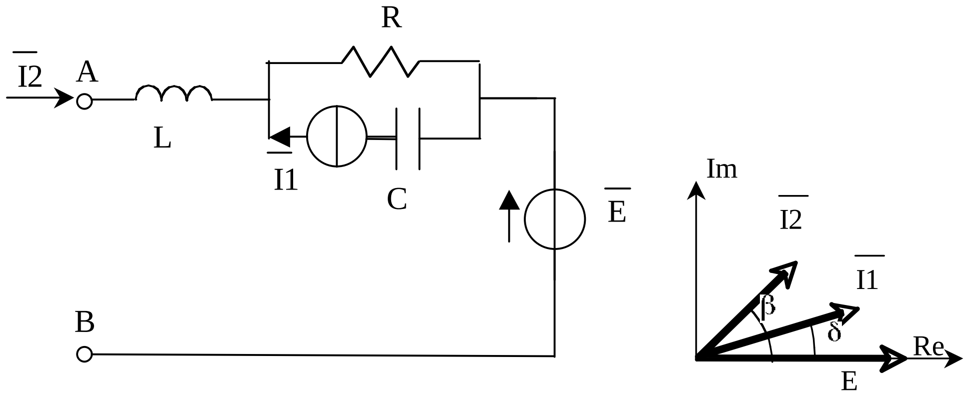

Figura 3.4

Determinare il bipolo equivalente di Thevenin ai morsetti AB e la potenza complessa ai morsetti AB

Soluzione

Le reattanze induttiva e capacitiva valgono rispettivamente:

$$Xl = 2\pi fL = 314.16\ \Omega$$
$$Xc = \frac{1}{2\pi fC} = 15.915\ \Omega$$

Mentre i fasori corrispondenti alle sorgenti possono essere ricavati dal diagramma fasoriale:

$$\overline{E} = E = 18\ V$$
$$\overline{I}1 = I1 \cdot e^{j\delta} = 10.392 + j6\ A$$
$$\overline{I}2 = I2 \cdot e^{j\beta} = 10.607 + j10.607\ A$$

Il bipolo equivalente di Theveni si ricava facilmente dall'osservazione della figura. Spegnendo i generatori rimane la serie di Xl e R, mentre la tensione a vuoto tra i morsetti AB è la somma della tensione del generatore E e della tensione su R, in quanto per soddisfare la *condizione di vuoto (senza carico) si deve imporre I2 = 0. Si ottiene dunque:*

$$\overline{Z}o = R + jXl = 10 + j314.16\,\Omega$$
$$\overline{V}o = \overline{E} + R\overline{I}1 = 121.923 + j60\,V$$

La potenza complessa ai morsetti AB può essere quindi ottenuta sfruttando il bipolo equivalente appena trovato (fig 3.5). La tensione a carico tra i morsetti è:

$$\overline{V}AB = \overline{V}o + \overline{Z}o \cdot \overline{I}2 = -3104 + j3498\,V$$

da cui:

$$\overline{A} = \overline{V}AB \cdot \underline{I}2 = -4179 + j70027VA$$

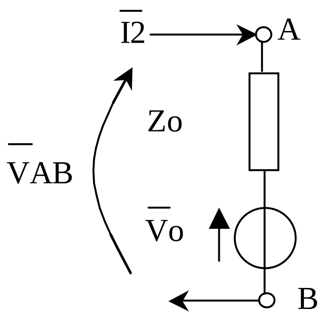

Figura 3.5

Esercizio 3.5

Dato il circuito in figura 3.6 sono noti:
R = 6 Ω, L = 1 mH, C = 12 μF
f = 50 Hz, δ = π/6
V1 = 18 V, I1 = 18 A
Determinare la tensione v(t) e lo sfasamento di Vr rispetto a Ic.

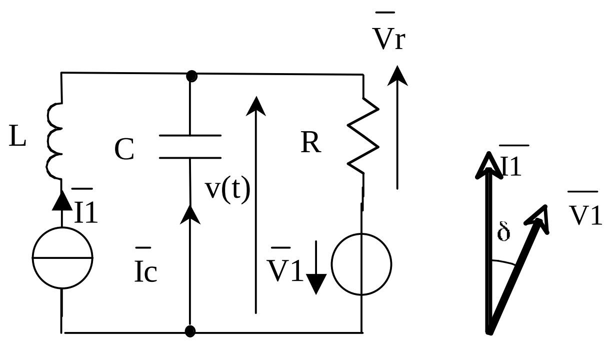

Figura 3.6

Soluzione

Scegliendo di posizionare l'asse reale allineato con il fasore tensione V1, si ottiene che la tensione V1 e la coorente I1 nel dominio fasoriale valgono rispettivamente:

$$\overline{V}1 = 18\,V \qquad \overline{I}1 = 18 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 15.59 + j9\,A$$

. La rete è costituita dal parallelo di $\overline{I}1$ *,* $\overline{V}1$ *e* $\overline{Z}r$ *(dove* $\overline{Z}r$ *= R),* $\overline{Z}c$ *= -j Xc. La reattanza Xc può essere facilmente calcolata come Xc = 1/(ωC) = 265.3 Ω, (ω = 2·π·f).*
La reattanza Xl, essendo in serie ad un generatore di corrente, non influenza la tensione vista ai morsetti esterni.
La tensione v(t) richiesta è quella ai capi di Xc, che può essere calcolata in diversi modi: si può infatti semplificare la parte della rete attorno a Xc cercando il bipolo equivalente serie oppure si può trasformare il bipolo , $\overline{V}1$ *e* $\overline{Z}r$ *nel suo equivalente parallelo riducendo così la rete nel parallelo di* $\overline{I}1$*, del bipolo paralleo e* $\overline{Z}c$ *da cui si può calcolare la tensione richiesta come:*

$$\overline{V} = \frac{\overline{I}1 - \dfrac{\overline{V}1}{\overline{Z}r}}{\dfrac{1}{\overline{Z}r} + \dfrac{1}{\overline{Z}c}} = 76.71 + j52.26\ V$$

La tensione v(t) risulta allora pari a

$v(t) = \sqrt{2}\,V\cos(\omega t + \text{atan}(\text{Im}(\overline{V})/\ \text{Re}(\overline{V}))) = 131.27\cdot\cos(314.15\cdot t+0.598)\ V$

La tensione $\overline{V}r$ *si trova scrivendo la legge delle tensioni e risulta pari a*

$\overline{V}r = \overline{V} + \overline{V}1 = 94.71+j52.265\ V$

La corrente Ic può essere calcolata come

$\overline{I}c = -\dfrac{\overline{V}}{\overline{Z}c}$ *= 0.197-j0.289 A.*

L'angolo φ richiesto è pari a φ = arg($\overline{V}r\ \ \underline{I}c$ *) = 1.477 rad*

Esercizio 3.6

Dato il circuito in figura 3.7 sono noti:
$\overline{V}1$= 10 V,
$\overline{V}2$ = j12 V,
R1= 2 Ω, R2 = 4 Ω

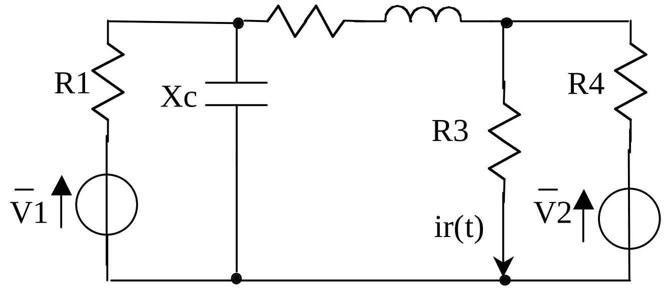

Figura 3.7

R3 = 5 Ω, R4 = 10 Ω, Xc = 2 Ω, Xl = 3 Ω,
f = 50 Hz.
Si deterimini ir(t).

Soluzione

Conviene semplificare la parte di rete di sinistra costituita dal bipolo di tipo serie cstituito dal generatore di tensione $\bar{V}1$ *e dall'impedenza* $\bar{Z}1$ *= R1, in parallelo a* $\bar{Z}c$ *= -j Xc , in serie all'impedenza Z2 = R2 + jXl.*
La tensione a vuoto si trova con la regola del partitore di tensione e vale

$$\bar{V}o = \bar{V}1 \frac{\bar{Z}c}{\bar{Z}c + \bar{Z}1} = 5 - j5\ V$$

l'impedenza equivalente è data dalla serie di Z2 e del parallelo di Z1 e Zc e vale $\bar{Z}o = 5 + j2\ \Omega$.
La corrente $\bar{I}r$ *può essere calcolata trasformando i due bipoli* $\bar{V}o - \bar{Z}o$ *e* $\bar{V}2 - \bar{Z}4$ *(*$\bar{Z}4$ *= R4) nel loro equivalente parallelo e applicando la regola del partitore di corrente tra Y3, Y4 e Yo si ottiene quindi:*

$$\bar{I}r = \left(\frac{\bar{V}o}{\bar{Z}o} + \frac{\bar{V}2}{\bar{Z}4}\right)\left(\frac{\bar{Y}3}{\bar{Y}3 + \bar{Y}4 + \bar{Y}o}\right) = 0.215 + j0.028\ A.$$

La corrente ir(t) risulta allora pari a ir(t)= 0.306$\cdot$cos*(314.15*$\cdot$*t+0.132) A*

Esercizio 3.7

Dato il circuito in figura 3.8 sono noti:
$\bar{Z}1$= 1-j Ω,
$\bar{Z}2$ = 2+j Ω,
$\bar{Z}3$ = 1-j2 Ω,
$\bar{Z}4$ = 3+j2 Ω,
V = 120 V,
I1 = 80 A, I2 = 50 A
Calcolare $\bar{I}$

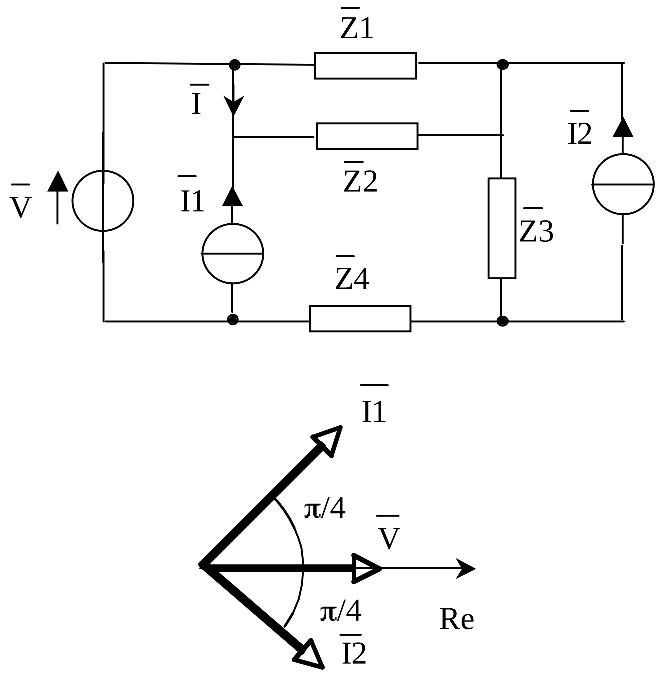

Figura 3.8

Soluzione

Conviene semplificare il circuito cercando il bipolo equivalente serie visto dai morsetti del ramo percorso dalla corrente I.
L'impedenza equivalente è data da $\overline{Z}eq = ((\overline{Z}3+\overline{Z}4)//\overline{Z}1)+\overline{Z}2$ = *2.923+j0.385 Ω (dove // indica il parallelo). Per il calcolo della tensione a vuoto conviene trasformare il bipolo parallelo formato da* $\overline{I}2$ *e* $\overline{Z}3$ *nel suo equivalente serie formato da* $\overline{V}2=\overline{Z}3\cdot\overline{I}2$ *e sempre* $\overline{Z}3$*. Si osserva a questo punto che l'impedenza* $\overline{Z}3$ *risulta in serie a* $\overline{Z}4$ *e che la rete è diventata binodale*
La tensione VAB può essere calcolata trasformado tutti i bipoli tra A e B in bipoli di tipo parallelo e risulta:

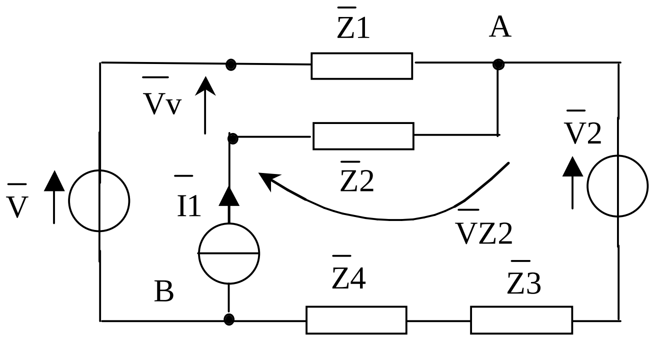

Figura 3.9

$$\overline{V}AB = \frac{\dfrac{\overline{V}1}{\overline{Z}1}+\overline{I}1+\dfrac{\overline{V}2}{\overline{Z}3+\overline{Z}4}}{\dfrac{1}{\overline{Z}1}+\dfrac{1}{\overline{Z}3+\overline{Z}4}} = 154.86 + j16.83\,V$$ *(formula di Millman)*

allora la tensione a vuoto è pari a
$\overline{V}v=\overline{V}Z1-\overline{V}Z2=(\overline{V}AB-\overline{V})-\overline{Z}2\cdot\overline{I}1$ = *-91.43-j186.5 V.*
La corrente I richiesta è allora data da
$\overline{I}=\overline{V}v/\overline{Z}eq$ = *-39-j58.68 A*

Esercizio 3.8

Dato il circuito in figura 3.10 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:
v1(t) = $\sqrt{2}\cdot 200\cdot\sin(500\cdot t)$ V,

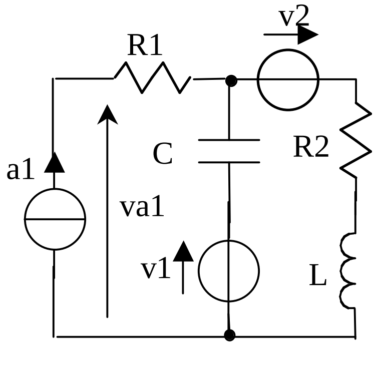

Figura 3.10

$v2(t) = \sqrt{2}\cdot 300\cdot\cos(500\cdot t)$ V
$a1(t) = \sqrt{2}\cdot 10\cdot\sin(500\cdot t-\pi/4)$ A
R1 = 5 Ω, R2 =10 Ω,
L = 20 mH,
C = 100 µF

Determinare la tensione va1(t)

Soluzione

I generatori di tensione e corrente espressi in regime fasoriale sono pari a: $\overline{V}1$ *= -j200 V,* $\overline{V}2$ *= 300 V,* $\overline{A}1 = 10e^{-j(\pi/4+\pi/2)}$ *A. Conviene semplificare la rete di destra cercando il bipolo equivalente serie.*
Le ipedenze sono $\overline{Z}r = R1$, $\overline{Z}c = -j/(\omega C)$ *(con* ω *= 500 rad/s),* $\overline{Z}2 = R2+j\omega L2$*, l'impedenza equivalente* $\overline{Z}eq$ *è data dalla serie di* $\overline{Z}r$ *con il parallelo di* $\overline{Z}c$ *e* $\overline{Z}2$. $\overline{Z}eq = \overline{Z}r + (\overline{Z}c // \overline{Z}2) = 25\ \Omega$.
La tensione a vuoto è data dalla legge alla maglia e vale
$\overline{V}v = \overline{V}1 - \overline{Z}c(\overline{V}1+\overline{V}2)/(\overline{Z}2+\overline{Z}c)$ *= -100+j300V.*
La tensione $\overline{V}a = \overline{V}v + \overline{Z}eq\overline{A}1 Va$ *= -267.78+j123.22 V. Ritornando nel dominio del tempo si trova: va1(t) = 428.46cos(500t+2.723) V*

Esercizio 3.9

Dato il circuito in figura 3.11, sono noti:
$\overline{V}1$= 10 V (fasore su Re)
R1= 5 Ω, R2 = 20 Ω
R3 = 6 Ω, R4 = 10 Ω,
C1 = C2 = 1 mF
L = 0.1 H, ω = 100 rad/s.

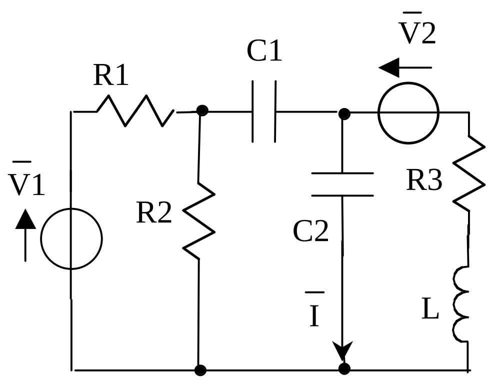

Figura 3.11

Calcolare V2 in modulo e fase rispetto a V1 in modo che I = 0.

Soluzione

Affinché la corrente I sia pari a zero dovrà essere I = Vc2/Zc2 = 0 e quindi dovrà essere nulla la tensione ai capi di C2.
Conviene semplificare la parte di rete di sinistra, costituita da V1-R1, R2, C1. Le impedenze possono essere calcolate come:

$\overline{Z}1$ *= R1,* $\overline{Z}2$ *= R2,* $\overline{Z}c$ *= -j/(ωC2)*

l'impedenza equivalente risulta la serie di $\overline{Z}c$ *con il parallelo di* $\overline{Z}1$ *e* $\overline{Z}2$, $\overline{Z}eq = (\overline{Z}1 // \overline{Z}2) + \overline{Z}c$ *= 4 - j10 Ω.*
La tensione a vuoto può essere calcolata con la regola del partitore di tensione e risulta pari a $\overline{V}o = \overline{V}1 \cdot \overline{Z}2/(\overline{Z}2 + \overline{Z}1)$ *= 8 V. La parte di rete di destra è costituita dall'impedenza* $\overline{Z}3$ *= R3+j(ωL) e dal generatore di tensione V2. Imponendo che la tensione ai capi di C2 sia nulla si ottiene:* $\overline{V}c2 = \overline{V}o - \overline{Z}eq(\overline{V}o - \overline{V}2)/(\overline{Z}eq + \overline{Z}3) = 0$*, da cui si ottiene:*
$\overline{V}2$ *= 5.241-j6.897 e quindi v2(t) = 12.25·cos(100·t-0.921) V*

Esercizio 3.10

Dato il circuito in figura 3.12, sono noti:
v1(t)= 14.139·sin(10·t) V,
R1= 2 Ω, R2 = 1 Ω
R3 = 4 Ω, C1 = C2 = 0.1 F
L1 = 0.1 H, L2 =0.5 H.

Calcolare i1(t), i2(t), v(t).

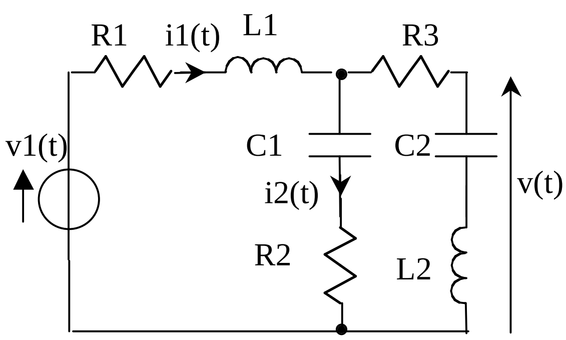

Figura 3.12

Soluzione
Il generatore di tensione v1(t) in regime fasoriale è pari a $\overline{V}1$ *= -j9.99 V. La rete è costituita dal parallelo di 3 bipoli: V1-Z1, Z2, Z3, dove*

$\overline{Z}1$*= R1+jωL,* $\overline{Z}2$ *= R2-j/(ωC1),* $\overline{Z}3$ *= R3 +j(ωL2- 1/(ωC2)).*

Per calcolare la tensione $\overline{V}$ *conviene trasformare V1-Z1 nel suo equivalente parallelo e notare che in tal modo si ottiene che la tensione* $\overline{V}u$ *ai capi di* $\overline{Z}2$ *è pari a*

$\bar{V}u = (\bar{V}1/\bar{Z}1)/(1/\bar{Z}1+1/\bar{Z}2+1/\bar{Z}3) = -2.543-j3.467$ V.

La tensione V si trova applicando la regola del partitore di tensione ed è pari a $\bar{V} = \bar{V}u \cdot (j(\omega L2-1/(\omega C2)))/\ \bar{Z}3 = 0.462-j3.005$ V, la corrente $\bar{I}2$ è pari a $\bar{I}2 = \bar{V}u/\bar{Z}2 = 0.462-j3.005$ A, la corrente $\bar{I}1 = (\bar{V}1-\bar{V}u)/\bar{Z}1 = -0.289-j3.121$ A.
Ritornando nel dominio del tempo si ottiene:
i1(t) = 4.43 cos(10t-1.663) A,
i2(t) = 4.3 cos(10t-1.418) A,
v(t) = 4.3cos(10t+1.418) V