CINEMATICA DEI FLUIDI

Introduzione

Nella cinematica dei fluidi non si hanno dimensione di massa. Si utilizzando solo grandezze di tempo e lunghezza. Nello specifico la cinematica dei fluidi descrive il moto disinteressandosi delle cause che lo hanno provocato, cosa invece verrà analizzata in dinamica.

Velocità

Supponiamo di individuare una particela di fluido (non è un'operazione che ha fisicamente senso, ma da un punto di vista matematico può essere considerato la più piccola parte del fluido a cui sono applicabile le equazioni). La dimensione della particella dipenderà dal caso in esame. In un determinato tempo t_1, nel sistema inerziale xyz, la particella si troverà nella posizione $\overline{x_1}$, in un istante t_2 la particella si troverà nella posizione $\overline{x_2}$ e così via. La rapidità con cui la particella varia la sua posizione è detta velocità:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{x}}{dt}$$

La velocità dunque altro non è che un vettore le cui componenti dipendono direttamente dal tempo:

$$v = (x, y, z, t) = (x(t), y(t), z(t), t)$$

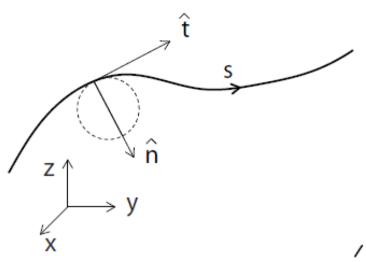
Dato che la dipendenza dal tempo è certa il vettore velocità può anche essere scritto così:

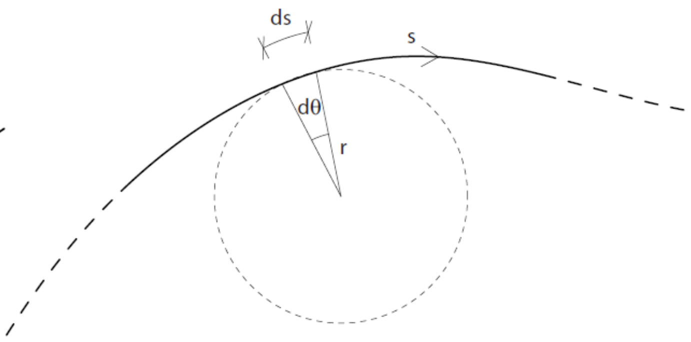
$$v = (v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3) = (u, v, z)$$

$$\begin{cases} v_x = v_1 = u = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = v_2 = v = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = v_3 = w = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

L'insieme delle posizioni assunte dalla particella nel tempo prende il nome di traiettoria. La traiettoria può quindi essere definita come il luogo dei punti successivamente occupati da una particella di fluido. In generale possono esistere tante traiettorie quante sono le particelle del fluido. La traiettoria permette di definire un sistema di riferimento che si muove nel tempo, un sistema di riferimento, dunque non inerziale, che chiamiamo terna intrinseca. Questo sistema di riferimento continua a avariare nel tempo e nello spazio; nello specifico la coordinata curvilinea $s(t)$ risulterà essere funzione del tempo stesso. Della terna intrinseca fanno parte tre versori:

- $\hat{t}$ versore tangente alla traiettoria
- $\hat{n}$ versore normale alla traiettoria che permette di definire il cerchio osculatore
- $\hat{b}$ versore binormale (uscente)





Nota questo nuovo sistema di riferimento, è possibile esprimere la velocità in funzione della traiettoria come:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{x}}{dt} = \frac{d\overline{x}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{t}\,\frac{ds}{dt} = \hat{t}v_s = v_s\hat{t}$$

Notiamo dunque che in un sistema intrinseco si ha solo una componente della velocità: quella tangenziale.

Accelerazione

Analizzando poi la rapidità con cui varia la velocità si può definire l'accelerazione. Nel sistema inerziale avremo:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{x}}{dt^2}$$

$$a = \left(a_x, a_y, a_z\right) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\begin{cases} a_x = a_1 = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = a_2 = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv_y}{dt} \\ a_z = a_3 = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

Mentre in quello intrinseco:

$$\frac{dv_s}{dt} = a_s$$

$$rd\vartheta = ds \quad \rightarrow \quad d\vartheta = \frac{ds}{r}$$

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s\hat{t}) = \frac{dv_s}{dt}\hat{t} + \frac{d\hat{t}}{dt}v_s = a_s\hat{t} + \frac{d\vartheta}{dt}\hat{n}v_s =$$

$$= a_s\hat{t} + \frac{ds}{rdt}\hat{n}v_s =$$

$$= a_s\hat{t} + \frac{ds}{dt}\hat{n}\frac{v_s}{r} =$$

$$= a_s\hat{t} + v_s\hat{n}\frac{v_s}{r} =$$

$$= a_s\hat{t} + \hat{n}\frac{{v_s}^2}{r}$$

Nel sistema intrinseco l'accelerazione è caratterizzata da due componenti: una componente tangenziale (accelerazione tangenziale) e una componente di accelerazione apparente poiché è il sistema di riferimento che varia non la particella (accelerazione centripeta o normale).

Punto di vista lagrangiano ed euleriano

Finora abbiamo parlato di velocità e accelerazioni della particella di fluido, cioè della velocità e dell'accelerazione viste da un osservatore che è in grado di identificare la particella e di seguirla lungo il suo moto. Il punto di vista di questo osservatore è detto Lagrangiano, e la maggior parte delle equazioni della Fisica sono scritte utilizzando tale approccio. Nel caso della Meccanica dei Fluidi, risulta, spesso, più opportuno mettersi nei panni di un osservatore fisso in un sistema di riferimento inerziale, che vede come le grandezze sono distribuite nello spazio in ogni istante di tempo, senza associarle ad una particolare particella di fluido. Questo secondo punto di vista è detto Euleriano. Il campo di moto può quindi essere descritto da questi due diversi punti di vista:

1. Lagrangiano $\rightarrow$ traiettorie (derivate totali rispetto al tempo perché misurano la velocità in un solo punto del fluido)
2. Euleriano $\rightarrow$ linee di corrente (derivate parziali rispetto al tempo perché misurano la velocità in ogni punto del dominio del fluido in un determinato istante temporale.

Esiste un modo per poter passare da un punto di vista all'altro:

$$\xi = \xi(x, y, z, t) = \xi(x(t), y(t), z(t), t)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_x \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = v_y \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = v_z$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} v_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} v_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i}$$

Questa equazione rappresenta la regola di derivazione Euleriana, che permette di passare dalla forma Lagrangiana a quella Euleriana delle equazioni (e viceversa). È possibile dimostrare facilmente che l'equazione della velocità la esprime sia in un sistema di riferimento inerziale sia nel caso di punto di vista Lagrangiano che Euleriano. Ciò invece non accade con l'accelerazione. Il concetto di traiettoria è, infatti, un tipico concetto Lagrangiano, incompatibile col punto di vista Euleriano, dove, per definizione, le particelle di fluido sono indistinguibili. Nel punto di vista Euleriano si utilizzano le linee di corrente, definite come le curve tangenti, in ogni punto e istante per istante, ai vettori velocità. La traiettoria rappresenta la storia di una singola particella; la linea di corrente, in un certo istante, fornisce informazioni relative a infinite particelle. Passiamo ora dall'espressione lagrangiana dell'accelerazione a quella euleriana:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{dv_i}{dt}\hat{\iota_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t}\hat{\iota_i} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\hat{\iota_i}$$

Dove si ha che:

- $\frac{\partial v_i}{\partial t}\hat{\iota_i}$ accelerazione locale (in un punto dello spazio si vede come la velocità cambia nel tempo)
- $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\hat{\iota_i}$ accelerazione convettiva (a tempo fissato si vede come varia la velocità nello spazio) prodotto misto tra vettore e tensore che vale:

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\hat{\iota_i} = \overline{v} \cdot \nabla \overline{v}$$

Tipologie di moto

Analizziamo ora brevemente le tipologie di moto che incontreremo nel corso. Generalmente classificheremo il moto in due modi:

1. In base al tempo
   a. Moto stazionario o permanente = tutte le derivate parziali sono nulle nel tempo dunque le traiettorie e le linee di corrente coincidono
   b. Moto non stazionario = almeno una derivata parziale rispetto al tempo è diversa da 0. Le traiettorie sono dunque diverse dalle linee di corrente

2. In base allo spazio
    a. Moto uniforme
        - Forte = tutte le derivate parziali rispetto allo spazio sono nulle
        - Debole = almeno una derivata parziali rispetto allo spazio è diversa da 0
    b. Moto non uniforme = questo moto in generale è tridimensionale ma esistono una serie di strategie tali per cui è possibile ridurre le dimensioni del problema. Una di questa strategia è la simmetria.