Approssimazione autovalori e autovettori

<table>
<tr><td rowspan="3">Metodo delle potenze</td><td>

<u>Convergenza metodo delle potenze</u>: questo metodo converge quando:

- La matrice A è diagonalizzabile
- Quando il vettore iniziale $\vec{x}^{(0)}$ ha almeno una componente diversa da 0

<u>Criterio arresto</u>: $\frac{|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}|}{\lambda^{(k)}} < toll$

</td></tr>
<tr><td>

Dato $\quad \vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x}^{(0)} \neq \vec{0}$

Calcolo $\quad \vec{y}^{(0)} = \frac{\vec{x}^{(0)}}{\|\vec{x}^{(0)}\|}$

Per $\; k = 0,1, \dots, (crit. arresto) \qquad \vec{x}^{(k)} = A\vec{y}^{(k)}$

$$\vec{y}^{(k)} = \frac{\vec{x}^{(k)}}{\|\vec{x}^{(k)}\|}$$

$$\lambda^{(k)} = \vec{y}'^{(k)} A \vec{y}^{(k)}$$

</td></tr>
<tr><td>

```
function [lamda, niter] = potenze(x0, A, toll, maxiter)

y = x0/norm(x0);
lamda0=0;

for k = 1:maxiter
    x = A*y;
    y = x/norm(x);
    lamda = y'*A*y;
    if (norm(lamda-lamda0)/lamda)<toll
       break;
    end
    lamda0=lamda;
end
niter = k;

end
```

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Metodo delle iterazioni QR</td><td>

<u>Fattorizzazione QR</u>: sia $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ una matrice non singolare, allora esiste la fattorizzazione QR ovvero $A = QR$ dove Q è una matrice ortogonale e R è una matrice triangolare superiore.

<u>Metodo delle iterazioni QR</u>: si parte ponendo $A^{(0)} = A$, nella generica iterazione si effettua la fattorizzazione QR della matrice $A^{(k)}$ e si calcola la nuova iterata rimoltiplicando i fattori in ordine diverso. Sotto opportune ipotesi la successione $A^{(k)}$ converge ad una matrice triangolare superiore che ha come elementi diagonali gli autovalori di A

<u>Convergenza metodo:</u> questo metodo converge quanto gli autovalori sono reali e distinti in modulo ovvero: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$

</td></tr>
<tr><td>

Dato $\quad A^{(0)} = A$

Per $\; k = 0,1, \dots, (crit. arresto) \qquad A^{(k)} = Q^{(k+1)} R^{(k+1)}$

$$A^{(k+1)} = R^{(k+1)} Q^{(k+1)}$$

$$\lambda_i^{(k+1)} = \left(A^{(k+1)}\right)_{ii}$$

</td></tr>
</table>

Convergenza metodo delle potenze

Enunciato: il metodo delle potenze converge

Dimostrazione: se ho gli autovettori $\overrightarrow{x_j}$ di uno spazio vettoriale posso scrivere un vettore $\vec{x}^{(0)}$ di tale spazio come combinazione lineare di tali autovettori:

$$\vec{x}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \overrightarrow{x_j}$$

Applico ora il metodo delle potenze:

$$\vec{y}^{(0)} = \frac{\vec{x}^{(0)}}{\left\|\vec{x}^{(0)}\right\|} = \frac{1}{\left\|\vec{x}^{(0)}\right\|}\vec{x}^{(0)} = \frac{1}{\left\|\vec{x}^{(0)}\right\|}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \overrightarrow{x_j}$$

Per definizione di autovalore:
$A\overrightarrow{x_j} = \lambda_j \overrightarrow{x_j}$

$$\vec{x}^{(1)} = A\vec{y}^{(0)} = A\frac{1}{\left\|\vec{x}^{(0)}\right\|}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \overrightarrow{x_j} = \frac{1}{\left\|\vec{x}^{(0)}\right\|}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, A\overrightarrow{x_j} = \frac{1}{\left\|\vec{x}^{(0)}\right\|}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \lambda_j \overrightarrow{x_j}$$

$$\vec{y}^{(1)} = \frac{\vec{x}^{(1)}}{\left\|\vec{x}^{(1)}\right\|} = \frac{1}{\left\|\vec{x}^{(1)}\right\|}\vec{x}^{(1)} = \frac{1}{\left\|\vec{x}^{(1)}\right\|}\frac{1}{\left\|\vec{x}^{(0)}\right\|}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \lambda_j \overrightarrow{x_j} = \frac{1}{\left\|\vec{x}^{(1)}\right\|\left\|\vec{x}^{(0)}\right\|}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \lambda_j \overrightarrow{x_j}$$

Si scopre quindi che per similitudine:

$$\vec{y}^{(k)} = \beta_k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, {\lambda_j}^k \overrightarrow{x_j} \qquad con \;\; \beta_k = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} ||\vec{x}^{(j)}||}$$

$\vec{y}^{(k)}$ può essere riscritto nel seguente modo:

$$\vec{y}^{(k)} = \beta_k \left[\alpha_1 {\lambda_1}^k \overrightarrow{x_1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \, {\lambda_j}^k \overrightarrow{x_j}\right] =$$

$$= \beta_k \left[\alpha_1 {\lambda_1}^k \overrightarrow{x_1} + {\lambda_1}^k \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \frac{{\lambda_j}^k}{{\lambda_1}^k} \overrightarrow{x_j}\right] =$$

$$= \beta_k {\lambda_1}^k \left[\alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \frac{{\lambda_j}^k}{{\lambda_1}^k} \overrightarrow{x_j}\right]$$

$$se \qquad k \to \infty \qquad \frac{{\lambda_j}^k}{{\lambda_1}^k} = \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \to 0 \qquad \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \frac{{\lambda_j}^k}{{\lambda_1}^k} \to 0 \qquad \vec{y}^{(k)} \to \overrightarrow{x_1}$$