| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi e Geometria 2**<br>**Docente:** | | **30 giugno 2016** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

**Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.**

**1.** Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 + a^2y^2$ sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - axy + a^2y^2 \leq a^2\}.$$

delimitato dall'ellisse di equazione $x^2 - axy + a^2y^2 = a^2$. Si trovino il massimo e il minimo assoluti di $f(x,y)$ nel dominio $D$.

Nell'esercizio $a$ denota un numero positivo.

Soluzione: osserviamo che l'origine $(0,0)$ è un punto di $D$ e che $f(0,0) = 0 \leq f(x,y)$ per ogni $(x,y)$, quindi $0$ è il minimo assoluto della funzione in $D$. Siccome l'origine è l'unico punto in cui si annulla il gradiente, i punti di massimo assoluto (ne esiste almeno uno per il teorema di Weierstrass) si trovano tra gli estremi di $f(x,y)$ sul bordo di $D$. Per il teorema di Fermat sul vincolo, i punti di massimo soddisfano il sistema $g(x,y) - a^2 = f_x g_y - f_y g_x = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x^2 - axy + a^2y^2 = a^2 \\ -2a(x^2 - a^2y^2) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $x = \pm ay$ e sostituendo nella prima otteniamo quattro punti critici vincolati: $P_1 = (-a/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $P_2 = (a/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $P_3 = (a,1)$ e $P_4 = (-a,-1)$. Ora

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{2a^2}{3}, f(P_3) = f(P_4) = 2a^2$$

per cui il massimo assoluto di $f(x,y)$ sul dominio $D$ è $2a^2$.

**2.** Sia $P$ il parallelogramma

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax \le y \le ax + b,\ -3x \le y \le c - 3x\}.$$

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_P e^{ax-y}\, dx\, dy$$

Soluzione: facciamo cambiamento di variabili $u = -ax + y$, $v = 3x + y$. Al variare del punto $(x, y)$ in $P$, il corrispondente punto $(u, v)$ varia nel rettangolo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le b,\ 0 \le v \le c\}.$$

Siccome $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -a - 3$,

$$\iint_P e^{ax-y}\, dx\, dy = \frac{1}{a+3} \iint_R e^{-u}\, dudv = \frac{1}{a+3}\, c\,(1 - e^{-b}) = \frac{3}{2}(1 - e^{-5})$$

**3.** Data la superficie regolare $S : x = 2\cos(u), y = \sin(u) + v, z = v, (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, calcolare il piano tangente $\alpha$ ad $S$ nel punto $A(-2, 1, 1)$. Determinare poi gli altri eventuali punti in cui $\alpha$ interseca $S$.

Soluzione: Per calcolare i valori dei parametri per cui si ottiene $A$, bisogna risolvere il sistema $2\cos(u) = -2, \sin(u) + v = 1, v = 1$, la cui unica soluzione è $u = \pi, v = 1$. Il piano tangente è ortogonale al vettore $P_u(\pi, 1) \times P_v(\pi, 1) = -\vec{j} \times (\vec{j} + \vec{k}) = -\vec{i}$ e quindi l'equazione di $\alpha$ è $-(x + 2) = 0$ ossia $x = -2$. Per trovare gli eventuali ulteriori punti d'intersezione, risolviamo l'equazione $2\cos(u) = -2$ ottenuta per sostituzione delle equazioni parametriche di $S$ nel'equazione di $\alpha$. Otteniamo quindi $u = \pi$, e quindi $\alpha$ incontra $S$ lungo la retta di equazione parametrica $x = -2, y = v, z = v, v \in \mathbb{R}$.

**4.** Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}_k = \left(kxy + \dfrac{1}{x}\right)\vec{\imath} + \left(x^2 + \dfrac{1}{y}\right)\vec{\jmath}$, con $k \in \mathbb{R}$, e sia dato l'arco $\gamma$ della parabola $y = x^2 - 2x + 2$ percorso da $B(2,2)$ ad $A(1,1)$.

(a) Determinare i valori del parametro reale $k$ per cui $\vec{F}_k$ è conservativo nel primo quadrante, e per tali valori calcolare un potenziale del campo. Sempre per tali valori di $k$, calcolare $\int_\gamma \vec{F}_k \cdot d\vec{s}$.

(b) Posto $k = 0$, calcolare

$$\int_\gamma \vec{F}_0 \cdot d\vec{s}.$$

Soluzione: Il campo $\vec{F}$ è irrotazionale se $\frac{\partial}{\partial y}\left(kxy + \frac{1}{x}\right) = kx = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \frac{1}{y}\right) = 2x$. Quindi, $\vec{F}$ è irrotazionale solo per $k = 2$. Essendo il primo quadrante semplicemente connesso, $\vec{F}$ è conservativo nel primo quadrante. Sia $U(x,y)$ un suo potenziale nel primo quadrante. Allora $\frac{\partial}{\partial x}U = 2xy + \frac{1}{x}$ ossia $U(x,y) = x^2y + \ln(x) + \varphi(y)$, per $x > 0$ e per qualche funzione $\varphi$ derivabile per $y > 0$. Inoltre, $\frac{\partial}{\partial y}U = x^2 + \varphi'(y) = x^2 + \frac{1}{y}$ e quindi, a meno di una costante arbitraria, abbiamo $U(x,y) = x^2y + \ln(x) + \ln(y) = x^2y + \ln(xy)$, con $x > 0, y > 0$. Usando i risultati sui campi conservativi, abbiamo che

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{s} = U(A) - U(B) = -7 - \ln(4).$$

Possiamo rispondere alla seconda domanda in vari modi. Vediamo una risposta diretta. La curva $\gamma$ viene parametrizzata come $x = t, y = t^2 - 2t + 2, t \in [1,2]$, ma in tal modo viene percorsa nel verso opposto rispetto a quanto richiesto. Il vettore tangente è $P' = \vec{\imath} + (2t-2)\vec{\jmath}$ e quindi si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}_0 \cdot d\vec{s} &= -\int_1^2 \left(\frac{1}{t} + \left(t^2 + \frac{1}{t^2 - 2t + 2}\right)(2t-2)\right) dt = -\int_1^2 \left(\frac{1}{t} + 2t^3 - 2t^2 + \frac{2t-2}{t^2-2t+2}\right) dt = \\ &= -\left(\ln(t) + \frac{1}{2}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \ln(t^2 - 2t + 2)\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{17}{6} - \ln(4).\end{aligned}$$

Un secondo modo si basa sulla seguente osservazione: il campo $\vec{F}_0$ verifica $\vec{F}_0 = \vec{F}_2 - 2xy\vec{\imath}$. Visto che

$$\int_\gamma xy\vec{\imath} \cdot \vec{s} = -\int_1^2 t(t^2 - 2t + 2)\, dt = -\frac{25}{12},$$

abbiamo che

$$\int_\gamma \vec{F}_0 \cdot \vec{s} = -7 - \ln(4) + \frac{25}{6} = -\frac{17}{6} - \ln(4).$$