Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Seconda Prova in Itinere** **7 luglio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.**

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) La funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$? Motivare la risposta.

(b) Usando la definizione, calcolare (se esistono) le derivate parziali di f in $(0,0)$.

(c) Usando la definizione, calcolare (se esiste) la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ di f nel punto $(0,0)$ lungo il versore $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(d) La funzione f è differenziabile in $(0,0)$? E negli altri punti di $\mathbb{R}^2$? Motivare la risposta.

Soluzione.

(a) La funzione f è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Per calcolare il $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ osservo che $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \left|\dfrac{\rho^5\cos^3\theta\sin^2\theta}{\rho^4}\right| \leq \rho$, da cui segue che il limite è 0 e quindi che f è continua in tutto $\mathbb{R}^2$.

(b) Essendo $f(0,y) = f(x,0) = 0$ per $x \neq 0$, $y \neq 0$, si ha $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(c) $D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\frac{1}{2}t, -\frac{\sqrt{3}}{2}t) - f(0,0)}{t} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{32}$.

(d) La funzione f non è differenziabile in $(0,0)$ in quanto non vale la formula del gradiente per il calcolo delle derivate direzionali. Lo è negli altri punti di $\mathbb{R}^2$.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 2 - 3x^2 - 3y^2 + 3x^2y + y^3.$$

Determinare i valori massimo e minimo della funzione nel quadrato di vertici $(1,3)$, $(-1,3)$, $(-1,1)$, $(1,1)$.

Soluzione. Per trovare i punti stazionari interni al quadrato si risolva il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -6x + 6xy = 0 \\ \\ f_y(x,y) = -6y + 3x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases} .$$

Si ottengono quattro punti stazionari $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$, di cui solo il secondo è interno al quadrato.

La matrice Hessiana in $(0,2)$ è

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

da cui segue che il punto è di minimo relativo forte. Inoltre $f(0,2) = -2$.

Analizzando i quattro lati del quadrato otteniamo

(a) lungo il lato $y = 1$ si ha $f(x,1) = 0$.
(b) lungo il lato $x = 1$ si ha $f(1,y) = (y-1)^3$ funzione crescente nella direzione dal punto $(1,1)$ al punto $(1,3)$.
(c) lungo il lato $y = 3$ si ha $f(x,3) = 2 + 6x^2$ che ha un minimo per $x = 0$ in cui la funzione vale 2.
(d) lungo il lato $x = -1$ si ha $f(-1,y) = (y-1)^3$ funzione crescente nella direzione dal punto $(-1,1)$ al punto $(-1,3)$.

Risulta quindi che il minimo di f è -2 ottenuto nel punto $(0,2)$ mentre per determinare il valore massimo si calcola $f(1,3) = 8$ $(= f(-1,3)$ per simmetria).

3. (a) Sia $\mathbf{F}$ un campo vettoriale definito su un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Scrivere le definizioni di $\mathbf{F}$ *conservativo* su A e di *potenziale* di $\mathbf{F}$ in A.

   (b) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (\cos(y)+3)\mathbf{i} \ + \ (-x\sin(y)+2g(x))\mathbf{j};$$

   dove $g(x)$ è una funzione definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ tale che $g(1)=1$.
   Per quali funzioni $g(x)$ il campo $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$?
   Per tali funzioni si trovi un potenziale di $\mathbf{F}$, e si calcoli l'integrale $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ (lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $\mathcal{C}$), dove $\mathcal{C}$ è l'arco della parabola $y=x^2$ compreso tra la retta $x=0$ e la retta $x=2$, percorso dall'alto verso il basso.

Soluzione. Si verifica innanzitutto l'irrotazionalitá. Dette F_1 ed F_2 le componenti del campo vettoriale $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = -\sin y$ e $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = -\sin y + 2g'(x)$. Da questo si deduce che $\mathbf{F}$ è irrotazionale su $\mathbb{R}^2$ (semplicemente connesso), e quindi conservativo, per $g'(x)=0$, cioè $g(x) = \mathit{cost} = 1$ (per la condizione data).

Un potenziale per $\mathbf{F}(x,y) = (\cos(y)+3)\mathbf{i} \ + \ (-x\sin(y)+2)\mathbf{j}$ è $U(x,y) = x\cos y + 3x + 2y$ e il lavoro si calcola come differenza tra il potenziale nel punto finale e quello nel punto finale di $\mathcal{C}$, cioé $U(0,0) - U(2,4) = -2\cos 4 - 14$.

4. (a) Si enunci il teorema del rotore o di Stokes.

   (b) Sia S la superficie grafico della funzione $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, definita sul disco

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

   e sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}.$$

   i. Trovare l'elemento d'area dS della superficie S.

   ii. Si orienti la superficie S col versore normale diretto verso l'alto, e si calcoli il flusso

$$\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

   attraverso S del rotore di $\mathbf{F}$.

   iii. Si calcoli il lavoro $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$ lungo il bordo $\mathcal{C}$ della superficie S, con l'orientazione indotta da S.

Soluzione.

i. Scegliendo per S la parametrizzazione $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}$ con $(u,v) \in D$ si ha che $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du\, dv = |2u\mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + \mathbf{k}|\, du\, dv = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\, du\, dv$.

ii. rot $\mathbf{F} = 6\mathbf{k}$ quindi $\displaystyle\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int\int_D 6\, du\, dv = 24\pi$.

iii. Dal teorema di Stokes possiamo concludere che $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = 24\pi$. In alternativa per i punti ii. e iii. si poteva calcolare $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_0^{2\pi} (-6\cos\theta\mathbf{i} + 6\sin\theta\mathbf{j}) \cdot (-2\cos\theta\mathbf{i} + 2\sin\theta\mathbf{j})\, d\theta$.