Analisi e Geometria 2

Docente:		**2 luglio 2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2|x|y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Si dica se f è continua nell'origine.
b) Si calcolino, se esistono, le derivate parziali di f nell'origine.
c) Si calcoli, se esiste, la derivata direzionale di f nell'origine nella direzione della bisettrice del primo quadrante e nel verso delle x crescenti.
d) Si dica se f è differenziabile nell'origine.

SOLUZIONE: a) passando per esempio in coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 2|x|y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^3\theta + 2|\cos\theta|\sin^2\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^3\theta + 2|\cos\theta|\sin^2\theta) = 0$$

perché la quantità tra parentesi è una funzione limitata e quindi il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima è infinitesima.

b) Usando la definizione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

c) Il versore richiesto è $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ quindi usando la definizione si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}} + 2|t|\frac{t^2}{2\sqrt{2}}}{t^2} \right) \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|t|}{t}$$

e questo limite non esiste (vale $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ se $t \to 0^+$ e vale $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ se $t \to 0^-$). Quindi la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione del versore $\mathbf{v}$ non esiste.

d) Siccome al punto c) abbiamo dimostrato che la derivata direzionale di f nell'origine nella direzione di $\mathbf{v}$ non esiste, allora f non può essere differenziabile in $(0,0)$ (perché se f fosse differenziabile in un punto, allora esisterebbero tutte le derivate direzionali in quel punto). Alternativamente con la definizione, occorrerebbe provare che il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

esiste e vale zero. Ma si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3 + 2|h|k^2}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2|h|k^2 - hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

e questo limite non esiste perché prendendo la direzione $h = k$ si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2(2|h| - h)}{2\sqrt{2}h^2|h|}$$

e questo limite non esiste (vale $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ se $h \to 0^+$ e vale $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ se $h \to 0^-$). Quindi la funzione data non è differenziabile nell'origine.

2. Trovare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x\, e^{-(x^2+y^2)}$$

sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \le 1\}.$$

SOLUZIONE: la funzione data è ovunque definita e di classe C^∞. L'insieme su cui essa va studiata è il cerchio di centro di centro $(1,0)$ e raggio 1. D è chiuso e limitato, quindi f ha massimo e minimo assoluti su D per il Teorema di Weierstrass. Si vede immediatamente che f è sempre non negativa su D (se $(x,y) \in D$ allora $x \ge 0$), che $f(x,y) = 0$ se e solo se $x = 0$ e che l'unico punto di D che ha ascissa nulla è l'origine, quindi $f(0,0) = 0$ e non vi sono altri punti in D in cui f si annulla. Quindi $(0,0)$ è punto di minimo assoluto per f in D. Occorre quindi solo cercare il punto, o i punti, di massimo assoluto.

Cerchiamo dapprima eventuali punti stazionari interni a D. Vale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(1 - 2x^2\right) e^{-(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xy\, e^{-(x^2+y^2)}.$$

L'unico punto in cui il gradiente si annulla in D è quindi $P_1 = (1/\sqrt{2}, 0)$. Vale $f(P_1) = 1/\sqrt{2e}$. Non è necessario procedere con il calcolo dell'Hessiana, visto che si stanno cercando solamente punti di massimo assoluto e basterà quindi a posteriori confrontare $f(P_1)$ con il valore massimo di f sul bordo.

A questo punto analizziamo il bordo. Sono utilizzabili tre metodi diversi.

PRIMO MODO. Esplicitiamo l'equazione del vincolo: si ha $x^2 + y^2 - 2x = 0$ da cui $x^2 + y^2 = 2x$. Sostituendo in f si vede che va considerata la funzione di una sola variabile $g(x) = xe^{-2x}$, dove deve essere $0 \le x \le 2$. È immediato vedere che tale funzione è massima in $x = 1/2$, che corrisponde ai seguenti punti su ∂D: $P_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $P_3 = (1/2, -\sqrt{3}/2)$. Si ha $f(P_2) = f(P_3) = 1/(2e) < 1/\sqrt{2e} = f(P_1)$. Quindi vi è un solo punto di massimo assoluto, cioè P_1, e vale

$$\max_D f = \frac{1}{\sqrt{2e}} \qquad \min_D f = 0.$$

SECONDO MODO. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del sistema diventa

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xe^{-(x^2+y^2)} - \lambda(x^2 + y^2 - 2x)$$

e gli estremi vincolati si trovano tra i punti critici della Lagrangiana. Dunque oltre all'equazione del vincolo deve valere:

$$\begin{cases} e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2) = \lambda(2x-2) \\ -2xye^{-(x^2+y^2)} = 2\lambda y. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $y = 0$ oppure $\lambda = -xe^{-(x^2+y^2)}$. Nel primo caso il vincolo dà $x = 0, x = 2$, mentre la prima equazione fornisce i corrispondenti valori di λ, non rilevanti per quanto richiesto. Nel secondo caso si ha $\lambda = -x\, e^{-(x^2+y^2)}$, che inserito nella prima equazione dà $x = 1/2$. Confrontando i valori di f nei punti trovati si ritrova quanto mostrato in precedenza.

TERZO MODO. Parametrizziamo la circonferenza in coordinate polari, centrate nel punto (1,0), si ha

$$x = 1 + \cos\theta \qquad y = \sin\theta$$

da cui inserendo nella funzione si ha

$$f(x,y) = g(\theta) := (1+\cos\theta)e^{-2(1+\cos\theta)} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Si ha $g'(\theta) = \sin\theta\,(1 + 2\cos\theta)\, e^{-2(1+\cos\theta)}$ e da ciò si vede che tale funzione è massima per $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$, che corrispondono ai punti P_2, P_3 trovati in precedenza. Si procede dunque come sopra.

3. Sia
$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$
Si calcoli
$$\iiint_T y\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

SOLUZIONE: si procede utilizzando le coordinate cilindriche (alternativamente si poteva procedere integrando "per fili"), quindi
$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z;$$
il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione (il cui valore assoluto costituisce l'elemento d'area) vale ρ. Per cui
$$\int\int\int_T y\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\rho^2} \rho\sin\theta\sqrt{\rho\cos\theta}\,\rho\,\mathrm{d}z = \left(\int_0^1 \sqrt{\rho}\rho^4\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\sqrt{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta\right).$$
A questo punto, lavorando separatamente con i due integrali si ha
$$\int_0^1 \rho^{9/2}\mathrm{d}\rho = \left[\frac{2}{11}\rho^{11/2}\right]_0^1 = \frac{2}{11}.$$
Inoltre
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\theta}\sin\theta\,d\theta = \left[-\frac{2}{3}(\cos\theta)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**2 luglio 2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3|x|y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Si dica se f è continua nell'origine.
b) Si calcolino, se esistono, le derivate parziali di f nell'origine.
c) Si calcoli, se esiste, la derivata direzionale di f nell'origine nella direzione della bisettrice del primo quadrante e nel verso delle x crescenti.
d) Si dica se f è differenziabile nell'origine.

SOLUZIONE: a) passando per esempio in coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+3|x|y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^3\theta + 3|\cos\theta|\sin^2\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^3\theta + 3|\cos\theta|\sin^2\theta) = 0$$

perché la quantità tra parentesi è una funzione limitata e quindi il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima è infinitesima.

b) Usando la definizione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

c) Il versore richiesto è $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ quindi usando la definizione si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}} + 3|t|\frac{t^2}{2\sqrt{2}}}{t^2} \right) \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{|t|}{t}$$

e questo limite non esiste (vale $\sqrt{2}$ se $t \to 0^+$ e vale $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ se $t \to 0^-$). Quindi la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione del versore $\mathbf{v}$ non esiste.

d) Siccome al punto c) abbiamo dimostrato che la derivata direzionale di f nell'origine nella direzione di $\mathbf{v}$ non esiste, allora f non può essere differenziabile in $(0,0)$ (perché se f fosse differenziabile in un punto, allora esisterebbero tutte le derivate direzionali in quel punto). Alternativamente con la definizione, occorrerebbe provare che il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

esiste e vale zero. Ma si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+3|h|k^2}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{3|h|k^2 - hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

e questo limite non esiste perché prendendo la direzione $h = k$ si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2(3|h| - h)}{2\sqrt{2}h^2|h|}$$

e questo limite non esiste (vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se $h \to 0^+$ e vale $\sqrt{2}$ se $h \to 0^-$). Quindi la funzione data non è differenziabile nell'origine.

2. Trovare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x\,e^{-(x^2+y^2)}$$

sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

SOLUZIONE: la funzione data è ovunque definita e di classe C^∞. L'insieme su cui essa va studiata è il cerchio di centro di centro $(-1,0)$ e raggio 1. D è chiuso e limitato, quindi f ha massimo e minimo assoluti su D per il Teorema di Weierstrass. Si vede immediatamente che f è sempre non positiva su D (se $(x,y) \in D$ allora $x \leq 0$), che $f(x,y) = 0$ se e solo se $x = 0$ e che l'unico punto di D che ha ascissa nulla è l'origine, quindi $f(0,0) = 0$ e non vi sono altri punti in D in cui f si annulla. Quindi $(0,0)$ è punto di massimo assoluto per f in D. Occorre quindi solo cercare il punto, o i punti, di minimo assoluto.

Cerchiamo dapprima eventuali punti stazionari interni a D. Vale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(1 - 2x^2\right) e^{-(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xy\,e^{-(x^2+y^2)}.$$

L'unico punto in cui il gradiente si annulla in D è quindi $P_1 = (-1/\sqrt{2}, 0)$. Vale $f(P_1) = -1/\sqrt{2e}$. Non è necessario procedere con il calcolo dell'Hessiana, visto che si stanno cercando solamente punti di minimo assoluto e basterà quindi a posteriori confrontare $f(P_1)$ con il valore minimo di f sul bordo.

A questo punto analizziamo il bordo. Sono utilizzabili tre metodi diversi.

PRIMO MODO. Esplicitiamo l'equazione del vincolo: si ha $x^2+y^2+2x = 0$ da cui $x^2+y^2 = -2x$. Sostituendo in f si vede che va considerata la funzione di una sola variabile $g(x) = xe^{2x}$, dove deve essere $-2 \leq x \leq 0$. È immediato vedere che tale funzione è minima in $x = -1/2$, che corrisponde ai seguenti punti su ∂D: $P_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, $P_3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$. Si ha $f(P_2) = f(P_3) = -1/(2e) > -1/\sqrt{2e} = f(P_1)$. Quindi vi è un solo punto di minimo assoluto, cioè P_1, e vale

$$\min_D f = -\frac{1}{\sqrt{2e}} \qquad \max_D f = 0.$$

SECONDO MODO. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del sistema diventa

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xe^{-(x^2+y^2)} - \lambda(x^2+y^2+2x)$$

e gli estremi vincolati si trovano tra i punti critici della Lagrangiana. Dunque oltre all'equazione del vincolo deve valere:

$$\begin{cases} e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2) = \lambda(2x+2) \\ -2xye^{-(x^2+y^2)} = 2\lambda y. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $y = 0$ oppure $\lambda = -xe^{-(x^2+y^2)}$. Nel primo caso il vincolo dà $x = 0, x = -2$, mentre la prima equazione fornisce i corrispondenti valori di λ, non rilevanti per quanto richiesto. Nel secondo caso si ha $\lambda = -x\,e^{-(x^2+y^2)}$, che inserito nella prima equazione dà $x = -1/2$. Confrontando i valori di f nei punti trovati si ritrova quanto mostrato in precedenza.

TERZO MODO. Parametrizziamo la circonferenza in coordinate polari, centrate nel punto (-1,0), si ha

$$x = -1 + \cos\theta \qquad y = \sin\theta$$

da cui inserendo nella funzione si ha

$$f(x,y) = g(\theta) := (-1+\cos\theta)e^{-2(1-\cos\theta)} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Si ha $g'(\theta) = \sin\theta\,(1 - 2\cos\theta)\,e^{-2(1-\cos\theta)}$ e da ciò si vede che tale funzione è minima per $\theta = \pi/3, 5\pi/3$, che corrispondono ai punti P_2, P_3 trovati in precedenza. Si procede dunque come sopra.

3. Sia

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Si calcoli

$$\iiint_T x\sqrt{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

SOLUZIONE: si procede utilizzando le coordinate cilindriche (alternativamente si poteva procedere integrando "per fili"), quindi

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z;$$

il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione (il cui valore assoluto costituisce l'elemento d'area) vale ρ. Per cui

$$\int\int\int_T y\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\rho^2} \rho\cos\theta\sqrt{\rho\sin\theta}\,\rho\,\mathrm{d}z = \left(\int_0^1 \sqrt{\rho}\rho^4\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sqrt{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right).$$

A questo punto, lavorando separatamente con i due integrali si ha

$$\int_0^1 \rho^{9/2}\mathrm{d}\rho = \left[\frac{2}{11}\rho^{11/2}\right]_0^1 = \frac{2}{11}.$$

Inoltre

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\cos\theta\, d\theta = \left[\frac{2}{3}(\sin\theta)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**2 luglio 2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2|x|y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Si dica se f è continua nell'origine.
b) Si calcolino, se esistono, le derivate parziali di f nell'origine.
c) Si calcoli, se esiste, la derivata direzionale di f nell'origine nella direzione della bisettrice del primo quadrante e nel verso delle x crescenti.
d) Si dica se f è differenziabile nell'origine.

SOLUZIONE: a) passando per esempio in coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2|x|y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^3\theta - 2|\cos\theta|\sin^2\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^3\theta - 2|\cos\theta|\sin^2\theta) = 0$$

perché la quantità tra parentesi è una funzione limitata e quindi il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima è infinitesima.

b) Usando la definizione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

c) Il versore richiesto è $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ quindi usando la definizione si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}} - 2|t|\frac{t^2}{2\sqrt{2}}}{t^2} \right) \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|t|}{t}$$

e questo limite non esiste (vale $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ se $t \to 0^+$ e vale $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ se $t \to 0^-$). Quindi la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione del versore $\mathbf{v}$ non esiste.

d) Siccome al punto c) abbiamo dimostrato che la derivata direzionale di f nell'origine nella direzione di $\mathbf{v}$ non esiste, allora f non può essere differenziabile in $(0,0)$ (perché se f fosse differenziabile in un punto, allora esisterebbero tutte le derivate direzionali in quel punto). Alternativamente con la definizione, occorrerebbe provare che il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

esiste e vale zero. Ma si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3-2|h|k^2}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-2|h|k^2 - hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

e questo limite non esiste perché prendendo la direzione $h = k$ si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2(-2|h| - h)}{2\sqrt{2}h^2|h|}$$

e questo limite non esiste (vale $-\frac{3}{2\sqrt{2}}$ se $h \to 0^+$ e vale $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ se $h \to 0^-$). Quindi la funzione data non è differenziabile nell'origine.

2. Trovare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = y\, e^{-(x^2+y^2)}$$

sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \le 1\}.$$

SOLUZIONE: la funzione data è ovunque definita e di classe C^∞. L'insieme su cui essa va studiata è il cerchio di centro di centro $(0,1)$ e raggio 1. D è chiuso e limitato, quindi f ha massimo e minimo assoluti su D per il Teorema di Weierstrass. Si vede immediatamente che f è sempre non negativa su D (se $(x,y) \in D$ allora $y \ge 0$), che $f(x,y) = 0$ se e solo se $y = 0$ e che l'unico punto di D che ha ascissa nulla è l'origine, quindi $f(0,0) = 0$ e non vi sono altri punti in D in cui f si annulla. Quindi $(0,0)$ è punto di minimo assoluto per f in D. Occorre quindi solo cercare il punto, o i punti, di massimo assoluto.

Cerchiamo dapprima eventuali punti stazionari interni a D. Vale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy\, e^{-(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(1-2y^2\right) e^{-(x^2+y^2)}.$$

L'unico punto in cui il gradiente si annulla in D è quindi $P_1 = (0, 1/\sqrt{2})$. Vale $f(P_1) = 1/\sqrt{2e}$. Non è necessario procedere con il calcolo dell'Hessiana, visto che si stanno cercando solamente punti di massimo assoluto e basterà quindi a posteriori confrontare $f(P_1)$ con il valore massimo di f sul bordo.

A questo punto analizziamo il bordo. Sono utilizzabili tre metodi diversi.

PRIMO MODO. Esplicitiamo l'equazione del vincolo: si ha $x^2 + y^2 - 2y = 0$ da cui $x^2 + y^2 = 2y$. Sostituendo in f si vede che va considerata la funzione di una sola variabile $g(y) = ye^{-2y}$, dove deve essere $0 \le y \le 2$. È immediato vedere che tale funzione è massima in $y = 1/2$, che corrisponde ai seguenti punti su ∂D: $P_2 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$, $P_3 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$. Si ha $f(P_2) = f(P_3) = 1/(2e) < 1/\sqrt{2e} = f(P_1)$. Quindi vi è un solo punto di massimo assoluto, cioè P_1, e vale

$$\max_D f = \frac{1}{\sqrt{2e}} \qquad \min_D f = 0.$$

SECONDO MODO. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del sistema diventa

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = ye^{-(x^2+y^2)} - \lambda(x^2 + y^2 - 2y)$$

e gli estremi vincolati si trovano tra i punti critici della Lagrangiana. Dunque oltre all'equazione del vincolo deve valere:

$$\begin{cases} -2xye^{-(x^2+y^2)} = 2\lambda x \\ e^{-(x^2+y^2)}(1-2y^2) = \lambda(2y-2). \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $x = 0$ oppure $\lambda = -ye^{-(x^2+y^2)}$. Nel primo caso il vincolo dà $y = 0, y = 2$, mentre la prima equazione fornisce i corrispondenti valori di λ, non rilevanti per quanto richiesto. Nel secondo caso si ha $\lambda = -y\, e^{-(x^2+y^2)}$, che inserito nella prima equazione dà $y = 1/2$. Confrontando i valori di f nei punti trovati si ritrova quanto mostrato in precedenza.

TERZO MODO. Parametrizziamo la circonferenza in coordinate polari, centrate nel punto (0,1), si ha

$$x = \cos\theta \qquad y = 1 + \sin\theta$$

da cui inserendo nella funzione si ha

$$f(x,y) = g(\theta) := (1+\sin\theta)e^{-2(1+\sin\theta)} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Si ha $g'(\theta) = \cos\theta\,(1 + 2\sin\theta)\, e^{-2(1+\sin\theta)}$ e da ciò si vede che tale funzione è massima per $\theta = 7\pi/6, 11\pi/6$, che corrispondono ai punti P_2, P_3 trovati in precedenza. Si procede dunque come sopra.

3. Sia
$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 \le 1,\ \ x \ge 0, y \ge 0\}.$$
Si calcoli
$$\iiint_T y\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$
SOLUZIONE: si procede utilizzando le coordinate cilindriche (alternativamente si poteva procedere integrando "per fili"), quindi
$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z;$$
il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione (il cui valore assoluto costituisce l'elemento d'area) vale ρ. Per cui
$$\int\int\int_T y\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\rho^2} \rho\sin\theta\sqrt{\rho\cos\theta}\,\rho\,\mathrm{d}z = 2\left(\int_0^1 \sqrt{\rho}\rho^4\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\sqrt{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta\right).$$
A questo punto, lavorando separatamente con i due integrali si ha
$$2\int_0^1 \rho^{9/2}\mathrm{d}\rho = 2\left[\frac{2}{11}\rho^{11/2}\right]_0^1 = \frac{4}{11}.$$
Inoltre
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\theta}\sin\theta\, d\theta = \left[-\frac{2}{3}(\cos\theta)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**2 luglio 2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3|x|y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Si dica se f è continua nell'origine.
b) Si calcolino, se esistono, le derivate parziali di f nell'origine.
c) Si calcoli, se esiste, la derivata direzionale di f nell'origine nella direzione della bisettrice del primo quadrante e nel verso delle x crescenti.
d) Si dica se f è differenziabile nell'origine.

SOLUZIONE: a) passando per esempio in coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 3|x|y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^3\theta - 3|\cos\theta|\sin^2\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^3\theta - 3|\cos\theta|\sin^2\theta) = 0$$

perché la quantità tra parentesi è una funzione limitata e quindi il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima è infinitesima.

b) Usando la definizione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

c) Il versore richiesto è $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ quindi usando la definizione si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}} - 3|t|\frac{t^2}{2\sqrt{2}}}{t^2} \right) \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{|t|}{t}$$

e questo limite non esiste (vale $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ se $t \to 0^+$ e vale $\sqrt{2}$ se $t \to 0^-$). Quindi la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione del versore $\mathbf{v}$ non esiste.

d) Siccome al punto c) abbiamo dimostrato che la derivata direzionale di f nell'origine nella direzione di $\mathbf{v}$ non esiste, allora f non può essere differenziabile in $(0,0)$ (perché se f fosse differenziabile in un punto, allora esisterebbero tutte le derivate direzionali in quel punto). Alternativamente con la definizione, occorrerebbe provare che il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

esiste e vale zero. Ma si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3 - 3|h|k^2}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-3|h|k^2 - hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

e questo limite non esiste perché prendendo la direzione $h = k$ si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2(-3|h| - h)}{2\sqrt{2}h^2|h|}$$

e questo limite non esiste (vale $-\sqrt{2}$ se $h \to 0^+$ e vale $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ se $h \to 0^-$). Quindi la funzione data non è differenziabile nell'origine.

2. Trovare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = y\,e^{-(x^2+y^2)}$$

sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+1)^2 \le 1\}.$$

SOLUZIONE: la funzione data è ovunque definita e di classe C^∞. L'insieme su cui essa va studiata è il cerchio di centro di centro $(0,-1)$ e raggio 1. D è chiuso e limitato, quindi f ha massimo e minimo assoluti su D per il Teorema di Weierstrass. Si vede immediatamente che f è sempre non positiva su D (se $(x,y) \in D$ allora $y \le 0$), che $f(x,y) = 0$ se e solo se $x = 0$ e che l'unico punto di D che ha ascissa nulla è l'origine, quindi $f(0,0) = 0$ e non vi sono altri punti in D in cui f si annulla. Quindi $(0,0)$ è punto di massimo assoluto per f in D. Occorre quindi solo cercare il punto, o i punti, di minimo assoluto.

Cerchiamo dapprima eventuali punti stazionari interni a D. Vale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy\,e^{-(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(1-2y^2\right)e^{-(x^2+y^2)}.$$

L'unico punto in cui il gradiente si annulla in D è quindi $P_1 = (0, -1/\sqrt{2})$. Vale $f(P_1) = -1/\sqrt{2e}$. Non è necessario procedere con il calcolo dell'Hessiana, visto che si stanno cercando solamente punti di minimo assoluto e basterà quindi a posteriori confrontare $f(P_1)$ con il valore minimo di f sul bordo.

A questo punto analizziamo il bordo. Sono utilizzabili tre metodi diversi.

PRIMO MODO. Esplicitiamo l'equazione del vincolo: si ha $x^2+y^2+2y = 0$ da cui $x^2+y^2 = -2y$. Sostituendo in f si vede che va considerata la funzione di una sola variabile $g(y) = ye^{2y}$, dove deve essere $-2 \le y \le 0$. È immediato vedere che tale funzione è minima in $y = -1/2$, che corrisponde ai seguenti punti su ∂D: $P_2 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$, $P_3 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$. Si ha $f(P_2) = f(P_3) = -1/(2e) > -1/\sqrt{2e} = f(P_1)$. Quindi vi è un solo punto di minimo assoluto, cioè P_1, e vale

$$\min_D f = -\frac{1}{\sqrt{2e}} \qquad \max_D f = 0.$$

SECONDO MODO. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del sistema diventa

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xe^{-(x^2+y^2)} - \lambda(x^2+y^2+2y)$$

e gli estremi vincolati si trovano tra i punti critici della Lagrangiana. Dunque oltre all'equazione del vincolo deve valere:

$$\begin{cases} -2xye^{-(x^2+y^2)} = 2\lambda x \\ e^{-(x^2+y^2)}(1-2y^2) = \lambda(2y-2) \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $x = 0$ oppure $\lambda = -ye^{-(x^2+y^2)}$. Nel primo caso il vincolo dà $y = 0, y = -2$, mentre la prima equazione fornisce i corrispondenti valori di λ, non rilevanti per quanto richiesto. Nel secondo caso si ha $\lambda = -y\,e^{-(x^2+y^2)}$, che inserito nella prima equazione dà $y = -1/2$. Confrontando i valori di f nei punti trovati si ritrova quanto mostrato in precedenza.

TERZO MODO. Parametrizziamo la circonferenza in coordinate polari, centrate nel punto (0,-1), si ha

$$x = \cos\theta \qquad y = -1 + \sin\theta$$

da cui inserendo nella funzione si ha

$$f(x,y) = g(\theta) := (-1+\sin\theta)e^{-2(1-\sin\theta)} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Si ha $g'(\theta) = \cos\theta\,(-1+2\sin\theta)\,e^{-2(1-\sin\theta)}$ e da ciò si vede che tale funzione è minima per $\theta = \pi/6, 5\pi/6$, che corrispondono ai punti P_2, P_3 trovati in precedenza. Si procede dunque come sopra.

3. Sia

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 \le 1,\ \ x \ge 0, y \ge 0\}.$$

Si calcoli

$$\iiint_T x\sqrt{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

SOLUZIONE: si procede utilizzando le coordinate cilindriche (alternativamente si poteva procedere integrando "per fili"), quindi

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z;$$

il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione (il cui valore assoluto costituisce l'elemento d'area) vale ρ. Per cui

$$\int\int\int_T y\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\rho^2} \rho\cos\theta\sqrt{\rho\sin\theta}\,\rho\,\mathrm{d}z = 2\left(\int_0^1 \sqrt{\rho}\rho^4\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sqrt{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right).$$

A questo punto, lavorando separatamente con i due integrali si ha

$$2\int_0^1 \rho^{9/2}\mathrm{d}\rho = 2\left[\frac{2}{11}\rho^{11/2}\right]_0^1 = \frac{4}{11}.$$

Inoltre

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\cos\theta\,d\theta = \left[\frac{2}{3}(\sin\theta)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$