Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Seconda prova in itinere** **1 luglio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = y\sqrt[3]{x}.$$

(a) Stabilire se esistono le derivate parziali di f nell'origine, e in caso affermativo calcolarle.

(b) Stabilire se f è differenziabile nell'origine.

(c) Stabilire se esistono i piani tangenti al grafico di f nei punti $(0,0,f(0,0))$ e $(1,1,f(1,1))$. In caso affermativo scriverne le equazioni.

Soluzione.

(a) Risulta $f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Analogamente, risulta $f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

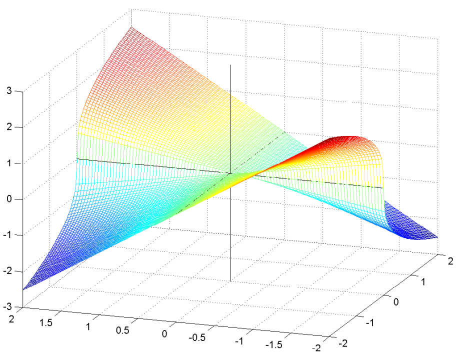

Figura 1: Grafico della superficie $z = y\sqrt[3]{x}$

(b) f è differenziabile nell'origine. Infatti, passando a coordinate polari $h = \rho\cos\theta, k = \rho\sin\theta$,

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{k\sqrt[3]{h}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\rho\sin\theta\sqrt[3]{\rho\cos\theta}}{\rho} = \rho^{1/3}\sin\theta\sqrt[3]{\cos\theta}$$

La quantità $\sin\theta\sqrt[3]{\cos\theta}$ si mantiene limitata per $\theta \in [0,2\pi]$ Quindi si vede che, quando $\rho \to 0$,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

(c) Il piano tangente a f in $(0,0,f(0,0))$ è il piano $z = 0$. Il piano tangente ad f in $(1,1,f(1,1))$ è il piano $z = x/3 + y - 1/3$.

2. Sia assegnata la funzione $f(x,y) = xy(4 - x^2 - y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Determinare i punti stazionari di f.

(b) Disegnare il settore circolare A chiuso e limitato, contenuto nel primo quadrante, limitato dall'asse x, dalla retta $y = \sqrt{3}\,x$ e dalla circonferenza centrata in $(0,0)$ e di raggio 2. Trovare quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x,y)$ su A.

Soluzione.

(a) La funzione è continua e differenziabile in tutti i punti del suo dominio. I punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x = y(4 - 3x^2 - y^2) = 0 \\ f_y = x(4 - x^2 - 3y^2) = 0. \end{cases}$$

Si trovano i punti $P_0 = (0,0)$, $P_{1,2} = (0, \pm 2)$, $P_{3,4} = (\pm 2, 0)$, $P_{5,6,7,8} = (\pm 1, \pm 1)$.

(b) L'insieme A è rappresentato in giallo nella figura.

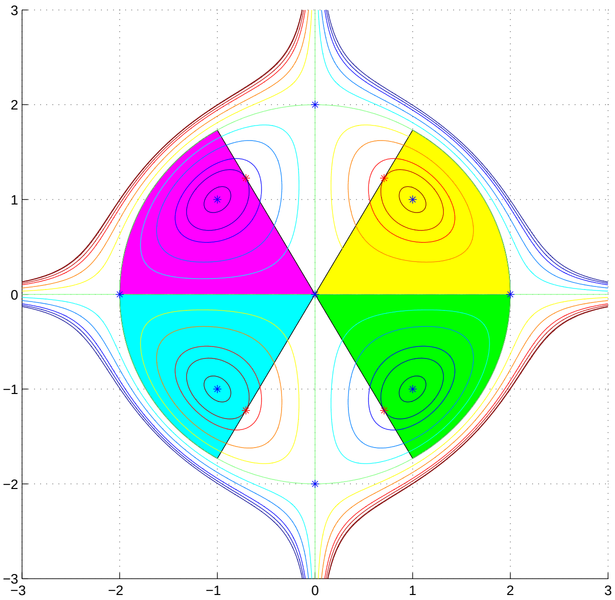

Figura 2: Linee di livello della superficie $f(x,y) = xy(4 - x^2 - y^2)$.

L'unico punto stazionario interno ad A è $P_5 = (1,1)$. Si deduce direttamente che P_5 è punto di massimo assoluto per f vincolata ad A, infatti f è positiva nei punti interni al quarto di cerchio nel primo quadrante e nulla sul suo bordo. Si deduce che

$$\max_A f(x,y) = f(1,1) = 2 \qquad \text{e} \qquad \min_A f(x,y) = 0.$$

I conti (pur corretti) che gli studenti possono evitare sono: il calcolo della matrice Hessiana in P_5 ovvero

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

definita negativa e la ricerca del massimo di f vincolato alla linea $y = \sqrt{3}x$, con $0 < x < 1$. Poiché il vincolo è esplicitabile, possiamo ricondurre il problema di ottimizzazione vincolata a un problema di ottimizzazione libera in una variabile per la funzione $z = 4\sqrt{3}x^2(1-x^2)$. Troviamo $z' = 8\sqrt{3}x(1-2x^2)$. Il punto di massimo vincolato all'unico tratto di bordo in cui la funzione assegnata non è nulla è quindi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

dove la funzione f assume il valore $\sqrt{3}$, che naturalmente è inferiore al massimo.

3. Si consideri il solido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \le x^2 + z^2 \le 4, 0 \le y \le z + 2\}$.

(a) Calcolare il volume di S .

(b) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j} + (2 - x)z\,\mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S .

Soluzione.

(a) *Primo modo.* Posto $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2, 1 \le x^2 + z^2 \le 4\}$, il volume è dato da

$$\iint_D (z + 2)\, dxdz = \iint_D z\, dxdz + \iint_D 2\, dxdz = \iint_D 2\, dxdz$$

(perché $\iint_D z\, dxdz = 0$ per motivi di simmetria). Ora, $\iint_D 2\, dxdz$ è uguale al doppio dell'area della corona circolare D . Dunque il volume cercato è uguale a

$$2 \iint_D dxdz = 2\pi(4 - 1) = 6\pi$$

Secondo modo. Passiamo a coordinate cilindriche rispetto all'asse y , ovvero poniamo $x = \varrho\cos\vartheta$, $z = \varrho\sin\vartheta$, $y = t$. La regione S si trasforma nella regione $S' = \{(\varrho, \vartheta, t), 1 \le \varrho \le 2, 0 \le \vartheta \le 2\pi, 0 \le t \le 2 + \varrho\sin\vartheta\}$. Indicando con $|S|$ il volume di S si ha:

$$\begin{aligned}
|S| &= \iiint_{S'} \varrho\, \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^2 \varrho \left(\int_0^{2+\varrho\sin\vartheta} \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\varrho\right] \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^2 \varrho\,(2 + \varrho\sin\vartheta)\, \mathrm{d}\varrho\right] \mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\varrho^2 + \frac{\varrho^3}{3}\sin\vartheta\right]_{\varrho=1}^{\varrho=2} \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} \left(3 + \frac{7}{3}\sin\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta \\
&= 6\pi
\end{aligned}$$

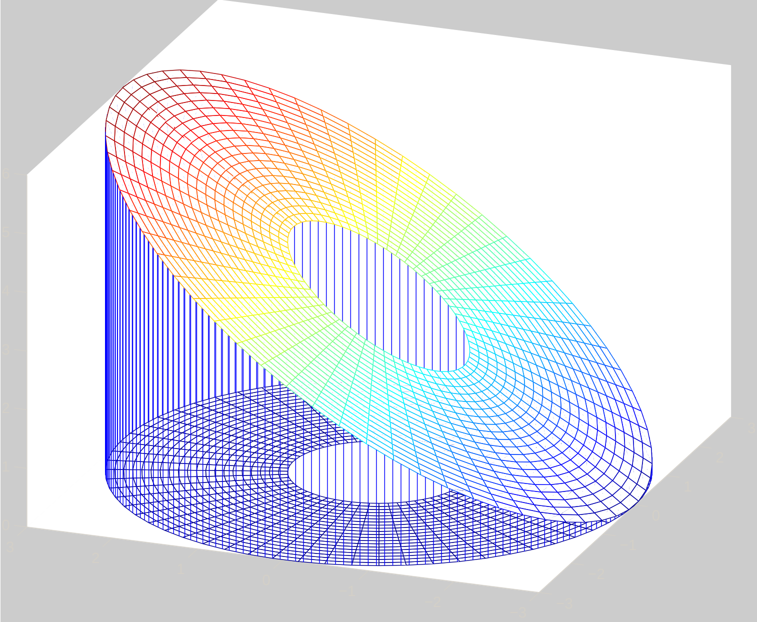

Figura 3: Il solido S .

(b) Sono verificate le condizioni del teorema della divergenza. Si ha $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2x - x + 2 - x = 2$. Dunque, indicato con $\mathbf{n}$ il versore normale uscente da ∂S e con $\mathrm{d}A$ l'elemento d'area, si ha:

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}A = \iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2|S| = 12\pi.$$

4. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale $\mathbf{F}_a$ su $\mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}_a(x,y,z) = (x+az)\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + (3z+x)\,\mathbf{k}$.

(a) Mostrare che esiste un solo valore del parametro a tale che $\mathbf{F}_a$ sia conservativo, determinare tale valore e calcolare, per tale scelta di a, un potenziale di $\mathbf{F}_a$;

(b) calcolare, per ogni valore di a, il lavoro del campo $\mathbf{F}_a$ lungo la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, 0, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Soluzione.

(a) Il dominio di definizione di $\mathbf{F}_a$ è semplicemente connesso e $\mathbf{F}_a$ è di classe C^∞, dunque $\mathbf{F}_a$ è conservativo se e solo se $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$. Per verificare per quali valori di a ciò accada, notiamo che $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial y} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial z} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial y} = 0$, mentre $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial z} = a$ e $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial x} = 1$. Si ha dunque che $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$ se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a calcoliamo un potenziale U (necessariamente esso risulterà di classe C^∞). Dovrà valere

$$x + z = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \ -2y = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \ 3z + x = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}.$$

La prima equazione implica che $U(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xz + \varphi_1(y,z)$, con φ_1 di classe C^∞. La seconda allora implica che $\varphi_1(y,z) = -y^2 + \varphi_2(z)$, con φ_2 di classe C^∞. La terza infine implica che $\varphi_2(z) = \frac{3}{2}z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. In conclusione un potenziale è dato, ponendo ad esempio $c = 0$, da $U(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xz - y^2 + \frac{3}{2}z^2$.

(b) Applichiamo il teorema di Stokes, notando che la circonferenza assegnata è il bordo, ad esempio, del cerchio Σ di raggio $R = 1$ centrato nell'origine e contenuto nel piano $y = 0$. Tale superficie ha come versori normali $\pm\mathbf{j}$ e, dato il verso di percorrenza assegnato al cammino, nell'utilizzo del teorema di Stokes va scelto il versore $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$. Notiamo che $\nabla \times \mathbf{F}_a = (a-1)\,\mathbf{j}$, così che si ha, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F}_a \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \iint_\Sigma (\nabla \times \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \iint_\Sigma (a-1)\,\mathbf{j} \cdot (-\mathbf{j})\ \mathrm{d}S = (1-a) \iint_\Sigma \mathrm{d}S = \pi(1-a).$$

Si noti che in particolare il flusso è nullo quando $a = 1$, fatto che poteva essere notato senza calcolo alcuno come conseguenza del punto precedente.

N.B. Il lavoro richiesto poteva anche essere calcolato direttamente.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Seconda prova in itinere** **1 luglio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia data la funzione
$$f(x,y) = x\sqrt[5]{y}.$$

(a) Stabilire se esistono le derivate parziali di f nell'origine, e in caso affermativo calcolarle.

(b) Stabilire se f è differenziabile nell'origine.

(c) Stabilire se esistono i piani tangenti al grafico di f nei punti $(0,0,f(0,0))$ e $(1,1,f(1,1))$. In caso affermativo scriverne le equazioni.

Soluzione.

(a) Risulta $f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Quindi
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$
Analogamente, risulta $f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

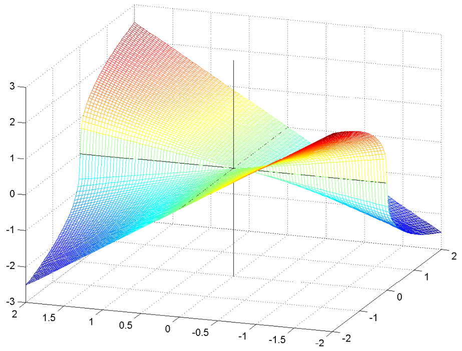

Figura 1: Grafico della superficie $z = x\sqrt[5]{y}$

(b) f è differenziabile nell'origine: infatti, utilizzando il passaggio in coordinate polari,
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\sqrt[5]{k}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta\sqrt[5]{\rho\sin\theta}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho^{1/5}\cos\theta\sqrt[5]{\sin\theta} = 0.$$

(c) Il piano tangente a f in $(0,0,f(0,0))$ è il piano $z = 0$. Il piano tangente ad f in $(1,1,f(1,1))$ è il piano $z = x + y/5 - 1/5$.

2. Sia assegnata la funzione $f(x,y) = xy(4-x^2-y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Determinare i punti stazionari di f.

(b) Disegnare il settore circolare A chiuso e limitato, contenuto nel secondo quadrante, limitato dall'asse x, dalla retta $y = -\sqrt{3}\,x$ e dalla circonferenza centrata in $(0,0)$ e di raggio 2. Trovare quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x,y)$ su A.

Soluzione.

(a) La funzione è continua e differenziabile in tutti i punti del suo dominio. I punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x = y(4-3x^2-y^2) = 0 \\ f_y = x(4-x^2-3y^2) = 0. \end{cases}$$

Si trovano i punti $P_0 = (0,0)$, $P_{1,2} = (0,\pm 2)$, $P_{3,4} = (\pm 2, 0)$, $P_{5,6,7,8} = (\pm 1, \pm 1)$.

(b) L'insieme A è rappresentato in magenta nella figura.

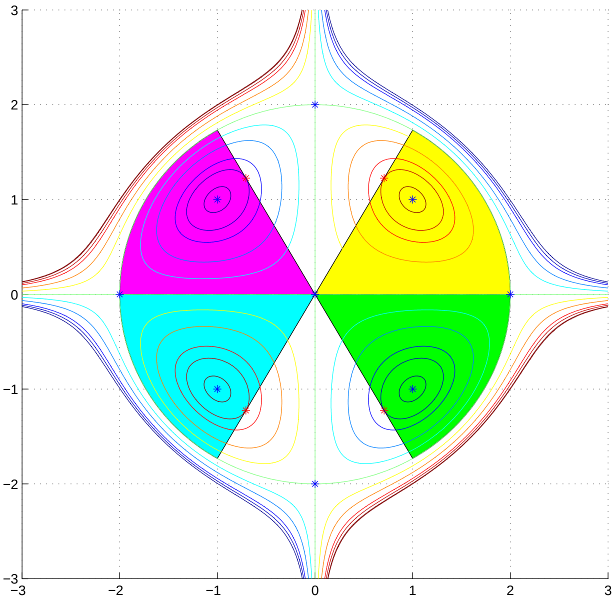

Figura 2: Linee di livello della superficie $f(x,y) = xy(4-x^2-y^2)$.

L'unico punto stazionario interno ad A è $P_6 = (-1,1)$. Si deduce direttamente che P_6 è punto di minimo assoluto per f vincolata ad A, infatti f è negativa nei punti interni al quarto di cerchio nel secondo quadrante e nulla sul suo bordo. Si deduce che

$$\min_A f(x,y) = f(-1,1) = -2 \qquad \text{e} \qquad \max_A f(x,y) = 0.$$

I conti (pur corretti) che gli studenti possono evitare sono: il calcolo della matrice Hessiana in P_6 ovvero

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

definita positiva e la ricerca del minimo di f vincolato alla linea $y = -\sqrt{3}x$, con $-1 < x < 0$. Poiché il vincoloè esplicitabile, possiamo ricondurre il problema di ottimizzazione vincolata a un problema di ottimizzazione libera in una variabile per la funzione $z = -4\sqrt{3}x^2(1-x^2)$. Troviamo $z' = 8\sqrt{3}x(2x^2-1)$. Il punto di minimo vincolato all'unico tratto di bordo in cui la funzione assegnata non è nulla è quindi

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

dove la funzione f assume il valore $-\sqrt{3}$, che naturalmente è superiore al minimo.

3. Si consideri il solido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \le x^2 + z^2 \le 9, 0 \le y \le z + 3\}$.

(a) Calcolare il volume di S .

(b) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = -xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} - (y - 3)z\,\mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S .

Soluzione.

(a) Passiamo a coordinate cilindriche rispetto all'asse y , ovvero poniamo $x = \varrho\cos\vartheta$, $z = \varrho\sin\vartheta$, $y = t$. La regione S si trasforma nella regione $S' = \{(\varrho, \vartheta, t), 1 \le \varrho \le 3, 0 \le \vartheta \le 2\pi, 0 \le t \le 3 + \varrho\sin\vartheta\}$. Indicando con $|S|$ il volume di S si ha:

$$\begin{aligned}
|S| &= \iiint_{S'} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^3 \varrho \left(\int_0^{3+\varrho\sin\vartheta} \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\varrho\right] \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^3 \varrho\,(3 + \varrho\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\right] \mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2}\varrho^2 + \frac{\varrho^3}{3}\sin\vartheta\right]_{\varrho=1}^{\varrho=3} \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} \left(12 + \frac{26}{3}\sin\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta \\
&= 24\pi.
\end{aligned}$$

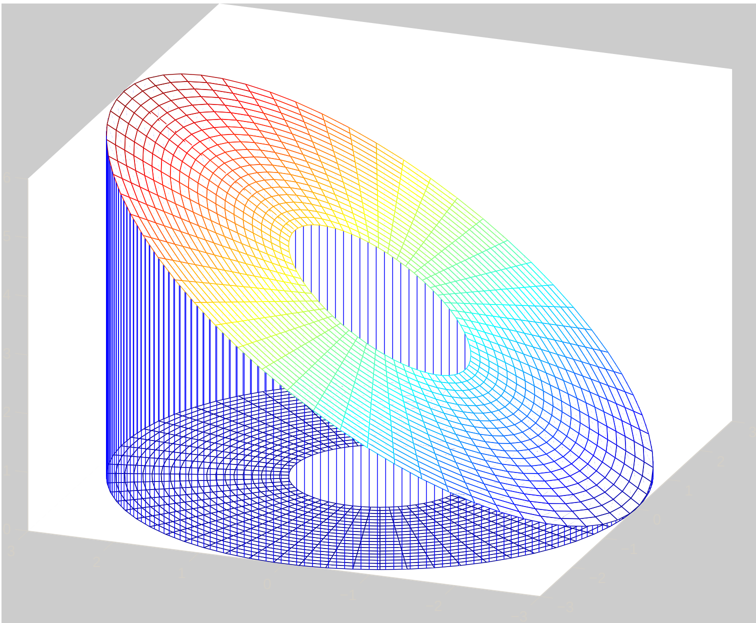

Figura 3: Il solido S .

(b) Sono verificate le condizioni del teorema della divergenza. Si ha $\nabla \cdot \mathbf{F} = -y + 2y - y + 3 = 3$. Dunque, indicato con $\mathbf{n}$ il versore normale uscente da ∂S e con $\mathrm{d}A$ l'elemento d'area, si ha:

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}A = \iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3|S| = 72\pi.$$

4. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale $\mathbf{F}_a$ su $\mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}_a(x,y,z) = (3x+y)\,\mathbf{i} + (y+ax)\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}$.

(a) Mostrare che esiste un solo valore del parametro a tale che $\mathbf{F}_a$ sia conservativo, determinare tale valore e calcolare, per tale scelta di a, un potenziale di $\mathbf{F}_a$;

(b) calcolare, per ogni valore di a, il lavoro del campo $\mathbf{F}_a$ lungo la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$

Soluzione.

1. Il dominio di definizione di $\mathbf{F}_a$ è semplicemente connesso e $\mathbf{F}_a$ è di classe C^∞, dunque $\mathbf{F}_a$ è conservativo se e solo se $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$. Per verificare per quali valori di a ciò accada, notiamo che $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial z} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial z} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial y} = 0$, mentre $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial y} = 1$ e $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial x} = a$. Si ha dunque che $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$ se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a calcoliamo un potenziale U (necessariamente esso risulterà di classe C^∞). Dovrà valere
$$3x + y = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x},\ y + x = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y},\ -2z = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}.$$
La prima equazione implica che $U(x,y,z) = \frac{3}{2}x^2 + xy + \varphi_1(y,z)$, con φ_1 di classe C^∞. La terza allora implica che $\varphi_1(y,z) = -z^2 + \varphi_2(y)$, con φ_2 di classe C^∞. La seconda infine implica che $\varphi_2(y) = \frac{1}{2}y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. In conclusione un potenziale è dato, ponendo ad esempio $c = 0$, da $U(x,y,z) = \frac{3}{2}x^2 + xy - z^2 + \frac{1}{2}y^2$.

2. Applichiamo il teorema di Stokes, notando che la circonferenza assegnata è il bordo, ad esempio, del cerchio Σ di raggio $R = 1$ centrato nell'origine e contenuto nel piano $z = 0$. Tale superficie ha come versori normali $\pm\mathbf{k}$ e, dato il verso di percorrenza assegnato al cammino, nell'utilizzo del teorema di Stokes va scelto il versore $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Notiamo che $\nabla \times \mathbf{F}_a = (a-1)\,\mathbf{k}$, così che si ha, per ogni $a \in \mathbb{R}$,
$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F}_a \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \iint_\Sigma (\nabla \times \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \iint_\Sigma (a-1)\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}\, \mathrm{d}S = (a-1) \iint_\Sigma \mathrm{d}S = \pi(a-1).$$
Si noti che in particolare il flusso è nullo quando $a = 1$, fatto che poteva essere notato senza calcolo alcuno come conseguenza del punto precedente.

   N.B. Il lavoro richiesto poteva anche essere calcolato direttamente.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Seconda prova in itinere** **1 luglio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = y\sqrt[5]{x}.$$

(a) Stabilire se esistono le derivate parziali di f nell'origine, e in caso affermativo calcolarle.

(b) Stabilire se f è differenziabile nell'origine.

(c) Stabilire se esistono i piani tangenti al grafico di f nei punti $(0,0,f(0,0))$ e $(-1,-1,f(-1,-1))$. In caso affermativo scriverne le equazioni.

Soluzione.

(a) Risulta $f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Analogamente, risulta $f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

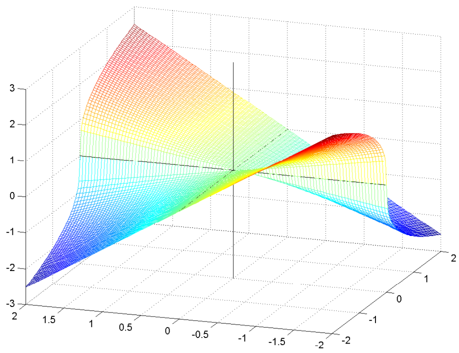

Figura 1: Grafico della superficie $z = y\sqrt[5]{x}$

(b) f è differenziabile nell'origine: infatti, utilizzando il passaggio in coordinate polari,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k\sqrt[5]{h}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho \sin\theta \sqrt[5]{\rho\cos\theta}}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \rho^{1/5} \sin\theta \sqrt[5]{\cos\theta} = 0.$$

(c) Il piano tangente a f in $(0,0,f(0,0))$ è il piano $z = 0$. Il piano tangente ad f in $(-1,-1,f(-1,-1))$ è il piano $z = -x/5 - y - 1/5$.

2. Sia assegnata la funzione $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Determinare i punti stazionari di f.

(b) Disegnare il settore circolare A chiuso e limitato, contenuto nel terzo quadrante, limitato dall'asse x, dalla retta $y = \sqrt{3}\,x$ e dalla circonferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio 2. Trovare quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x, y)$ su A.

Soluzione.

(a) La funzione è continua e differenziabile in tutti i punti del suo dominio. I punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x = y(4 - 3x^2 - y^2) = 0 \\ f_y = x(4 - x^2 - 3y^2) = 0. \end{cases}$$

Si trovano i punti $P_0 = (0, 0)$, $P_{1,2} = (0, \pm 2)$, $P_{3,4} = (\pm 2, 0)$, $P_{5,6,7,8} = (\pm 1, \pm 1)$.

(b) L'insieme A è rappresentato in ciano nella figura.

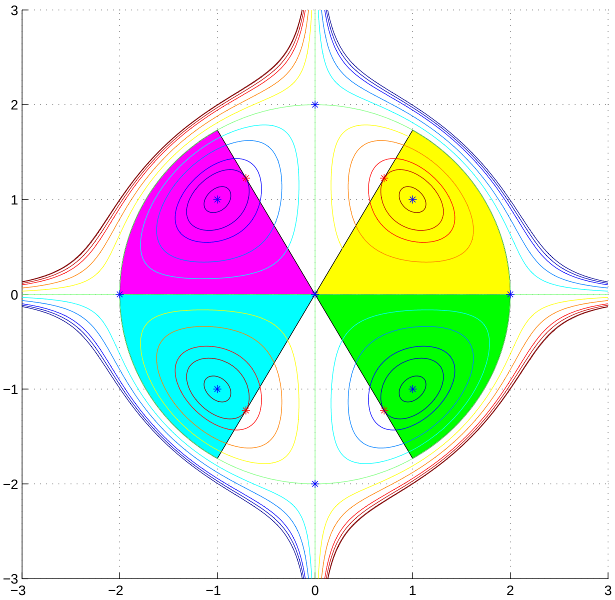

Figura 2: Linee di livello della superficie $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$.

L'unico punto stazionario interno ad A è $P_7 = (-1, -1)$. Si deduce direttamente che P_7 è punto di massimo assoluto per f vincolata ad A, infatti f è positiva nei punti interni al quarto di cerchio nel terzo quadrante e nulla sul suo bordo. Si deduce che

$$\max_A f(x, y) = f(-1, -1) = 2 \qquad \text{e} \qquad \min_A f(x, y) = 0.$$

I conti (pur corretti) che gli studenti possono evitare sono: il calcolo della matrice Hessiana in P_5 ovvero

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

definita negativa e la ricerca del massimo di f vincolato alla linea $y = \sqrt{3}x$, con $-1 < x < 0$. Poiché il vincolo è esplicitabile, possiamo ricondurre il problema di ottimizzazione vincolata a un problema di ottimizzazione libera in una variabile per la funzione $z = 4\sqrt{3}x^2(1 - x^2)$. Troviamo $z' = 8\sqrt{3}x(1 - 2x^2)$. Il punto di massimo vincolato all'unico tratto di bordo in cui la funzione assegnata non è nulla è quindi

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

dove la funzione f assume il valore $\sqrt{3}$, che naturalmente è inferiore al massimo.

3. Si consideri il solido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \le y^2 + z^2 \le 4, 0 \le x \le z + 2\}$.

(a) Calcolare il volume di S .

(b) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = x(4 - z)\,\mathbf{i} - yz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S .

Soluzione.

(a) Passiamo a coordinate cilindriche rispetto all'asse x , ovvero poniamo $y = \varrho\cos\vartheta$, $z = \varrho\sin\vartheta$, $x = t$. La regione S si trasforma nella regione $S' = \{(\varrho, \vartheta, t), 1 \le \varrho \le 2, 0 \le \vartheta \le 2\pi, 0 \le t \le 2 + \varrho\sin\vartheta\}$. Indicando con $|S|$ il volume di S si ha:

$$
\begin{aligned}
|S| &= \iiint_{S'} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[\int_1^2 \varrho\left(\int_0^{2+\varrho\sin\vartheta}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varrho\right]\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi}\left[\int_1^2 \varrho\,(2+\varrho\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\right]\mathrm{d}\vartheta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\varrho^2 + \frac{\varrho^3}{3}\sin\vartheta\right]_{\varrho=1}^{\varrho=2}\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi}\left(3 + \frac{7}{3}\sin\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta\\
&= 6\pi.
\end{aligned}
$$

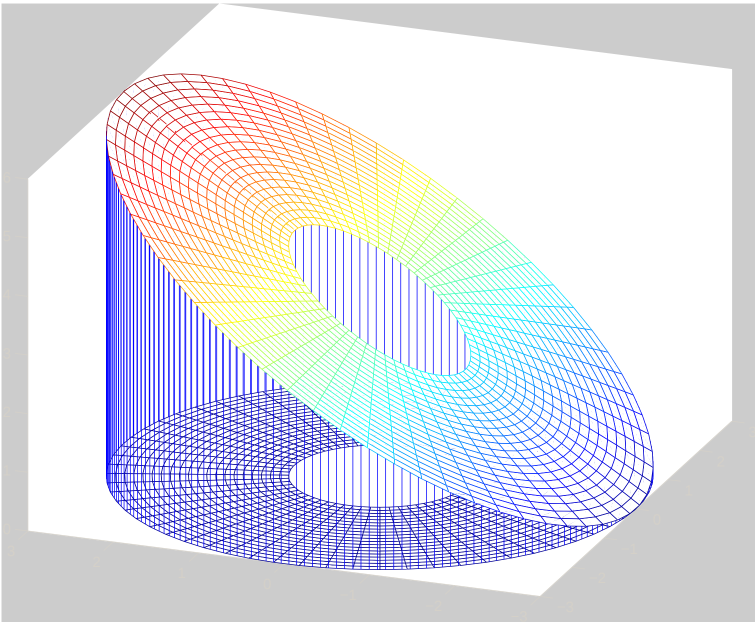

Figura 3: Il solido S .

(b) Sono verificate le condizioni del teorema della divergenza. Si ha $\nabla\cdot\mathbf{F} = 4 - z - z + 2z = 4$. Dunque, indicato con $\mathbf{n}$ il versore normale uscente da ∂S e con $\mathrm{d}A$ l'elemento d'area, si ha:

$$
\iint_{\partial S}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A = \iiint_S \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4|S| = 24\pi.
$$

4. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale $\mathbf{F}_a$ su $\mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}_a(x,y,z) = -2x\,\mathbf{i} + (3y + z)\,\mathbf{j} + (z + ay)\,\mathbf{k}$.

(a) Mostrare che esiste un solo valore del parametro a tale che $\mathbf{F}_a$ sia conservativo, determinare tale valore e calcolare, per tale scelta di a, un potenziale di $\mathbf{F}_a$;

(b) calcolare, per ogni valore di a, il lavoro del campo $\mathbf{F}_a$ lungo la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (0, \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Soluzione.

1. Il dominio di definizione di $\mathbf{F}_a$ è semplicemente connesso e $\mathbf{F}_a$ è di classe C^∞, dunque $\mathbf{F}_a$ è conservativo se e solo se $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$. Per verificare per quali valori di a ciò accada, notiamo che $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial y} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial z} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial x} = 0$, mentre $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial z} = 1$ e $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial y} = a$. Si ha dunque che $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$ se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a calcoliamo un potenziale U (necessariamente esso risulterà di classe C^∞). Dovrà valere

$$-2x = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \ 3y + z = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \ z + y = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}.$$

La prima equazione implica che $U(x,y,z) = -x^2 + \varphi_1(y,z)$, con φ_1 di classe C^∞. La seconda allora implica che $\varphi_1(y,z) = \frac{3}{2}y^2 + zy + \varphi_2(z)$, con φ_2 di classe C^∞. La terza infine implica che $\varphi_2(z) = \frac{1}{2}z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. In conclusione un potenziale è dato, ponendo ad esempio $c = 0$, da $U(x,y,z) = -x^2 + \frac{3}{2}y^2 + zy + \frac{1}{2}z^2$.

2. Applichiamo il teorema di Stokes, notando che la circonferenza assegnata è il bordo, ad esempio, del cerchio Σ di raggio $R = 1$ centrato nell'origine e contenuto nel piano $x = 0$. Tale superficie ha come versori normali $\pm\mathbf{i}$ e, dato il verso di percorrenza assegnato al cammino, nell'utilizzo del teorema di Stokes va scelto il versore $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Notiamo che $\nabla \times \mathbf{F}_a = (a-1)\,\mathbf{i}$, così che si ha, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F}_a \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \iint_\Sigma (\nabla \times \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma (a-1)\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}\,\mathrm{d}S = (a-1) \iint_\Sigma \mathrm{d}S = \pi(a-1).$$

Si noti che in particolare il flusso è nullo quando $a = 1$, fatto che poteva essere notato senza calcolo alcuno come conseguenza del punto precedente.

N.B. Il lavoro richiesto poteva anche essere calcolato direttamente.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Seconda prova in itinere** **1 luglio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = x\sqrt[3]{y}.$$

(a) Stabilire se esistono le derivate parziali di f nell'origine, e in caso affermativo calcolarle.

(b) Stabilire se f è differenziabile nell'origine.

(c) Stabilire se esistono i piani tangenti al grafico di f nei punti $(0,0,f(0,0))$ e $(-1,-1,f(-1,-1))$. In caso affermativo scriverne le equazioni.

Soluzione.

(a) Risulta $f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Analogamente, risulta $f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

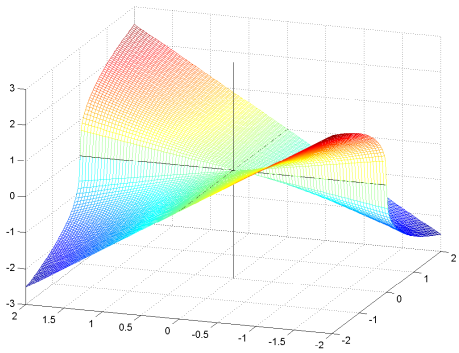

Figura 1: Grafico della superficie $z = x\sqrt[3]{y}$

(b) f è differenziabile nell'origine: infatti, utilizzando il passaggio in coordinate polari,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\sqrt[3]{k}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta\sqrt[3]{\rho\sin\theta}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho^{1/3}\cos\theta\sqrt[3]{\sin\theta} = 0.$$

(c) Il piano tangente a f in $(0,0,f(0,0))$ è il piano $z = 0$. Il piano tangente ad f in $(-1,-1,f(-1,-1))$ è il piano $z = -x - y/3 - 1/3$.

2. Sia assegnata la funzione $f(x,y) = xy(4 - x^2 - y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Determinare i punti stazionari di f.

(b) Disegnare il settore circolare A chiuso e limitato, contenuto nel quarto quadrante, limitato dall'asse x, dalla retta $y = -\sqrt{3}\,x$ e dalla circonferenza centrata in $(0,0)$ e di raggio 2. Trovare quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x,y)$ su A.

Soluzione.

(a) La funzione è continua e differenziabile in tutti i punti del suo dominio. I punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x = y(4 - 3x^2 - y^2) = 0 \\ f_y = x(4 - x^2 - 3y^2) = 0. \end{cases}$$

Si trovano i punti $P_0 = (0,0)$, $P_{1,2} = (0, \pm 2)$, $P_{3,4} = (\pm 2, 0)$, $P_{5,6,7,8} = (\pm 1, \pm 1)$.

(b) L'insieme A è rappresentato in verde nella figura.

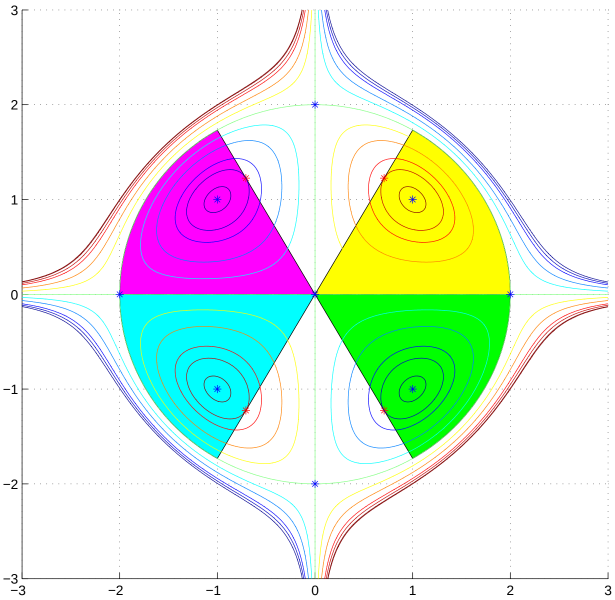

Figura 2: Linee di livello della superficie $f(x,y) = xy(4 - x^2 - y^2)$.

L'unico punto stazionario interno ad A è $P_8 = (1, -1)$. Si deduce direttamente che P_8 è minimo assoluto per f vincolata ad A, infatti f è negativa nei punti interni al quarto di cerchio nel quarto quadrante e nulla sul suo bordo. Si deduce che

$$\min_A f(x,y) = f(1,-1) = -2 \qquad \text{e} \qquad \max_A f(x,y) = 0.$$

I conti (pur corretti) che gli studenti possono evitare sono: il calcolo della matrice Hessiana in P_6 ovvero

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

definita positiva e la ricerca del minimo di f vincolato alla linea $y = -\sqrt{3}x$, con $0 < x < 1$. Poiché il vincolo è esplicitabile, possiamo ricondurre il problema di ottimizzazione vincolata a un problema di ottimizzazione libera in una variabile per la funzione $z = -4\sqrt{3}x^2(1 - x^2)$. Troviamo $z' = 8\sqrt{3}x(2x^2 - 1)$. Il punto di minimo vincolato all'unico tratto di bordo in cui la funzione assegnata non è nulla è quindi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

dove la funzione f assume il valore $-\sqrt{3}$, che naturalmente è superiore al minimo.

3. Si consideri il solido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \le y^2 + z^2 \le 9, 0 \le x \le z + 3\}$.

(a) Calcolare il volume di S .

(b) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y(5 - x)\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S .

Soluzione.

(a) Passiamo a coordinate cilindriche rispetto all'asse x , ovvero poniamo $y = \varrho\cos\vartheta$, $z = \varrho\sin\vartheta$, $x = t$. La regione S si trasforma nella regione $S' = \{(\varrho, \vartheta, t), 1 \le \varrho \le 3, 0 \le \vartheta \le 2\pi, 0 \le t \le 3 + \varrho\sin\vartheta\}$. Indicando con $|S|$ il volume di S si ha:

$$
\begin{aligned}
|S| &= \iiint_{S'} \varrho\, \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^3 \varrho \left(\int_0^{3+\varrho\sin\vartheta} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\varrho \right] \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^3 \varrho\,(3 + \varrho\sin\vartheta)\, \mathrm{d}\varrho \right] \mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2}\varrho^2 + \frac{\varrho^3}{3}\sin\vartheta \right]_{\varrho=1}^{\varrho=3} \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} \left(12 + \frac{26}{3}\sin\vartheta \right) \mathrm{d}\vartheta \\
&= 24\pi.
\end{aligned}
$$

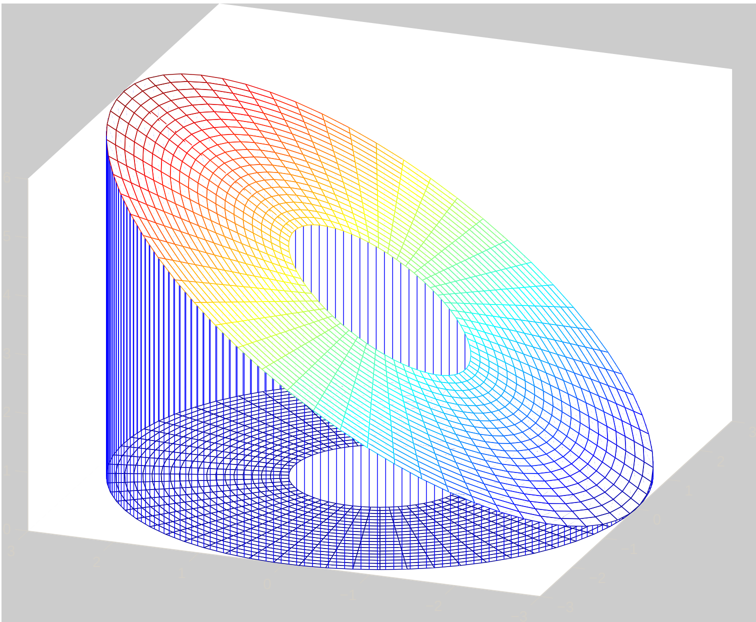

Figura 3: Il solido S .

(b) Sono verificate le condizioni del teorema della divergenza. Si ha $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 5 - x - x = 5$. Dunque, indicato con $\mathbf{n}$ il versore normale uscente da ∂S e con $\mathrm{d}A$ l'elemento d'area, si ha:

$$
\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}A = \iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 5|S| = 120\pi.
$$

4. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale $\mathbf{F}_a$ su $\mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}_a(x,y,z) = -2x\,\mathbf{i} + (y + az)\,\mathbf{j} + (3z+y)\,\mathbf{k}$.

(a) Mostrare che esiste un solo valore del parametro a tale che $\mathbf{F}_a$ sia conservativo, determinare tale valore e calcolare, per tale scelta di a, un potenziale di $\mathbf{F}_a$;

(b) calcolare, per ogni valore di a, il lavoro del campo $\mathbf{F}_a$ lungo la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (0, \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Soluzione.

1. Il dominio di definizione di $\mathbf{F}_a$ è semplicemente connesso e $\mathbf{F}_a$ è di classe C^∞, dunque $\mathbf{F}_a$ è conservativo se e solo se $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$. Per verificare per quali valori di a ciò accada, notiamo che $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial y} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial z} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial x} = 0$, mentre $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial z} = a$ e $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial y} = 1$. Si ha dunque che $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$ se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a calcoliamo un potenziale U (necessariamente esso risulterà di classe C^∞). Dovrà valere

$$-2x = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \; y+z = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \; 3z+y = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}.$$

   La prima equazione implica che $U(x,y,z) = -x^2 + \varphi_1(y,z)$, con φ_1 di classe C^∞. La seconda allora implica che $\varphi_1(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + zy + \varphi_2(z)$, con φ_2 di classe C^∞. La terza infine implica che $\varphi_2(z) = \frac{3}{2}z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. In conclusione un potenziale è dato, ponendo ad esempio $c = 0$, da $U(x,y,z) = -x^2 + \frac{1}{2}y^2 + zy + \frac{3}{2}z^2$.

2. Applichiamo il teorema di Stokes, notando che la circonferenza assegnata è il bordo, ad esempio, del cerchio Σ di raggio $R = 1$ centrato nell'origine e contenuto nel piano $x = 0$. Tale superficie ha come versori normali $\pm\mathbf{i}$ e, dato il verso di percorrenza assegnato al cammino, nell'utilizzo del teorema di Stokes va scelto il versore $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Notiamo che $\nabla \times \mathbf{F}_a = (1-a)\,\mathbf{i}$, così che si ha, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F}_a \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \iint_\Sigma (\nabla \times \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma (1-a)\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}\,\mathrm{d}S = (1-a) \iint_\Sigma \mathrm{d}S = \pi(1-a).$$

   Si noti che in particolare il flusso è nullo quando $a = 1$, fatto che poteva essere notato senza calcolo alcuno come conseguenza del punto precedente.

   N.B. Il lavoro richiesto poteva anche essere calcolato direttamente.