

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (2x + 2) \arctan x \, dx$$

PRIMITIVA: $(x^2 + 2x + 1) \arctan x - \ln(x^2 + 1) - x + c$

INTEGRALE: $-\ln 2 + \pi - 1$

- (b) Stabilire se il seguente integrale generalizzato è convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x) \sin^2 x}{(1+x)x^{7/2}} \, dx$$

Indicata con f la funzione integranda, per $x \rightarrow 0^+$ risulta $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

e per $x \rightarrow +\infty$ risulta $|f(x)| = o(\frac{1}{x^{7/2}})$, per cui L'INTEGRALE È CONVERGENTE.

2. Sia r la retta intersezione dei piani di equazioni $x - y + 2z - 1 = 0$ e $2x + y + z = 0$.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r .

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - t \\ y = -\frac{2}{3} + t \\ z = t \end{cases}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano ortogonale a r che passa per il punto $P \equiv (0, 1, 2)$.

$$-x + y + z - 3 = 0$$

(c) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r .

PUNTO DI INTERSEZIONE RETTA-PIANO:

$$H \equiv \left(-1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

DISTANZA PUNTO-RETTE:

$$\overline{PH} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

3. Sia γ l'arco di curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi .$$

(a) Calcolare il versore \mathbf{T} tangente a γ nel punto P della curva corrispondente al valore $t = \pi$.

$$\mathbf{T} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano che passa per P parallelo a \mathbf{T} e al vettore $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

$$3(x + 1) + y + (z - \pi) = 0$$

(c) Calcolare $\int_{\gamma} \sqrt{2}xyz \, ds$.

$$\int_0^{2\pi} t \sin 2t \, dt = -\pi$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t^2 - t} \\ y(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{t^2 - t} dt$$

$$y = k \frac{t-1}{t}$$

$$y(2) = \frac{1}{2} \iff k = 1$$