Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria I	Ing. AER-MEC-ENG	Seconda prova in itinere 31 gennaio 2011
Cognome (stampatello):	Nome:	Matricola:

- **Le risposte alle domande devono essere scritte su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, solo in caso di necessità, sul retro. Non verranno accettati fogli di brutta.**
- **Ogni risposta deve essere giustificata.**
- **Punteggi degli esercizi**: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

1. Sia r la retta di equazioni parametriche

$$r \ : \ \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

e sia $P \equiv (2, 1, -1)$.

(a) Rappresentare in forma cartesiana il piano π che contiene r e passa per P.

(b) Rappresentare in forma parametrica la retta s che passa per P, è contenuta in π ed è ortogonale a r.

2. Data la curva γ avente equazione parametrica

$$\gamma \;:\; \mathbf{r}(t) = (t^4 + t^2 - t)\mathbf{i} + (t^5 + t)\mathbf{j}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

(a) stabilire se γ è semplice;

(b) determinare il versore tangente $\mathbf{T}$ in $P(0,0)$;

(c) determinare il versore normale $\mathbf{N}$ in $P(0,0)$;

(d) determinare l'equazione del cerchio osculatore in $P(0,0)$.

3. Data l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{2}{x}y + 4x,$$

(a) determinare l'integrale generale;

(b) risolvere il problema di Cauchy

$$y' = -\frac{2}{x}y + 4x, \qquad\qquad y(1) = 2,$$

specificando l'intervallo massimale sul quale tale soluzione può essere estesa.

4. Dato l'integrale improprio

$$\int_0^{64} \frac{1}{x^\alpha(\sqrt[3]{x}-9)}\,dx,$$

(a) determinare per quali valori di α esso converge;

(b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Domanda di teoria

Soluzione

1. **(a)** Eliminando il parametro t, si può esprimere la retta come intersezione di due piani. Ad esempio, ricavando $t = -y$ dalla seconda equazione e sostituendo nella altre due, si ottiene che la retta è l'intersezione dei piani di equazioni $x+3y+1=0$ e $y+z-2=0$. Il piano π cercato apparterrà al fascio generato da questi due piani e avrà pertanto equazione del tipo $x+3y+1+k(y+z-2)=0$. Dalla rappresentazione precedente, resta in effetti escluso il piano di equazione $y+z-2=0$, che però non contiene il punto P. Imponendo il passaggio per il punto P, si ottiene $k=3$. Sostituendo si ricava una equazione di π: $x+6y+3z-5=0$.

   (b) La retta s si può ottenere come intersezione del piano π con il piano che passa per P ortogonale a r, cioè con il piano di equazione $3(x-2)-(y-1)+(z+1)=0$, ossia $3x-y+z-4=0$. Le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x+6y+3z-5=0 \\ 3x-y+z-4=0 \end{cases}$$
si possono esprimere ad esempio nella forma
$$\begin{cases} x = \frac{29}{19} - \frac{9}{19}t \\ y = \frac{11}{19} - \frac{8}{19}t \\ z = t \end{cases},$$
che fornisce una rappresentazione parametrica della retta s.

2. **(a)** Detta $y(t)$ la seconda componente dell'equazione parametrica di γ, cioè $y(t) = t^5 + t$, osserviamo che la sua derivata $y'(t) = 5t^4+1$ è sempre positiva, dunque y è monotona, e quindi $y(t_1) \neq y(t_2)$ per ogni coppia di valori $t_1 \neq t_2$; pertanto, γ è semplice;

   (b-d) innanzitutto determiniamo per quale valore di t la curva passa per il punto P, poiché, scegliendo la seconda coordinata, abbiamo
$$t^5 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(t^4+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0,$$
sappiamo che la curva passa per $P(0,0)$ quando $t=0$; inoltre
$$\begin{array}{l} \mathbf{r}'(t) = (4t^3+2t-1)\mathbf{i} + (5t^4+1)\mathbf{j} \\ \mathbf{r}''(t) = (12t^2+2)\mathbf{i} + 20t^3\mathbf{j} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \mathbf{r}'(0) = -\mathbf{i}+\mathbf{j} \\ \mathbf{r}''(0) = 2\mathbf{i} \end{array};$$
dunque $\mathbf{T} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$, inoltre il centro C del cerchio osculatore si trova sulla retta per P e perpendicolare a $\mathbf{r}'(0)$, ossia sulla retta $y=x$, per valori positivi di x (concordemente con il fatto che la componente in $\mathbf{i}$ di $\mathbf{r}''(0)$ è positiva e quindi $\mathbf{N} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$), e a distanza da P pari al reciproco della curvatura
$$\frac{|\mathbf{r}''(0) \wedge \mathbf{r}'(0)|}{|\mathbf{r}'(0)|^3} = \frac{2}{(\sqrt{2})^3},$$
pertanto $C(1,1)$ e l'equazione del cerchio osculatore è
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0.$$

3. **(a)** L'equazione $y' = -\frac{2}{x}y + x$ è una equazione differenziale lineare del primo ordine. L'espressione $-\frac{2}{x}$ è definita sia per $x>0$ sia per $x<0$. Per $x>0$ osserviamo che
$$\int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x + k,$$
pertanto, detta $A(x) = -2\ln x$ abbiamo che
$$y(x) = e^{A(x)}\left\{c + \int e^{-A(x)} \cdot 4x\,dx\right\} = \frac{1}{x^2}\left\{c + x^4\right\} = \frac{c}{x^2} + x^2.$$

Conti analoghi portano al medesimo risultato anche per $x < 0$, dunque l'integrale generale, valido sia nell'intervallo $(0, +\infty)$ sia nell'intervallo $(-\infty, 0)$, è

$$y(x) = \frac{c}{x^2} + x^2.$$

(b) Imponendo la condizione $y(1) = 2$ si trova $c = 1$, dunque la soluzione è $y(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$, definita sull'intervallo $(0, +\infty)$.

4. **(a)** L'integrale è improprio in $x = 0$, abbiamo che per $x \to 0$ la funzione integranda è asintotica a $-\frac{1}{9x^\alpha}$, dunque l'integrale converge per $\alpha < 1$;

(b) ponendo $\sqrt[6]{x} = t$ (da cui $dx = 6t^5\ dt$), e integrando per sostituzione, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{64} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - 9)}\ dx &= \int_0^2 \frac{6t^5}{t^3(t^2-9)}\ dt = 6\int_0^2 \frac{t^2}{t^2-9}\ dt \\
&= 6\int_0^2 \frac{t^2 - 9 + 9}{t^2-9}\ dt = 6\int_0^2 \left[1 + \frac{9}{t^2-9}\right]\ dt \\
&\quad \left\{\text{poiché } \frac{9}{t^2-9} = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right]\right\} \\
&= \int_0^2 \left[6 + \frac{9}{t-3} - \frac{9}{t+3}\right]\ dt = \left[6t + 9\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right]_0^2 = 12 - 9\ln 5.
\end{aligned}$$