Fondamenti di Fisica Sperimentale

Seconda prova *in itinere* - 28/06/2016

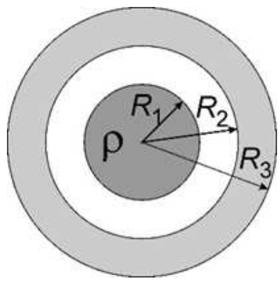
POLITECNICO DI MILANO
Dipartimento di Fisica

Esercizio 1

Si dimostri che, fissate le temperature T_1 e $T_2 < T_1$ di due sorgenti termiche, la macchina di Carnot ha il massimo rendimento fra tutte le macchine che operano tra tali sorgenti (teorema di Carnot).

Esercizio 2

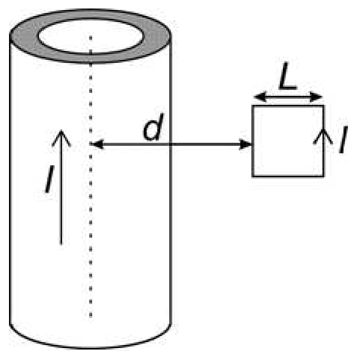
Una carica positiva è distribuita uniformemente con densità volumetrica ρ in una sfera di raggio R_1. La distribuzione di carica è circondata da un guscio sferico conduttore neutro di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3, come mostrato in figura.



a) Si determini il campo elettrico in modulo, direzione e verso in tutto lo spazio.
b) Si determini il potenziale elettrostatico V_2 a distanza R_2 dal centro della sfera, avendo posto a zero il valore del potenziale all'infinito.
c) Si discuta, giustificando la risposta, come cambia il risultato del punto a) nel caso in cui il conduttore venga collegato a terra.

Esercizio 3

Un cilindro cavo conduttore di lunghezza infinita, raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 è percorso da una corrente I come in figura. A distanza d dall'asse del cilindro è posta una spira quadrata di lato L percorsa anch'essa da una corrente di intensità I, come mostrato in figura. Si calcolino (specificando modulo, direzione e verso di ogni vettore):



a) il campo magnetostatico $\mathbf{B}$ generato in tutto lo spazio dal solo cilindro cavo;
b) la risultante $\mathbf{R}$ delle forze agenti sulla spira quadrata.

Esercizio 4

Due sferette conduttrici, di medesimo raggio R, sono caricate rispettivamente con cariche Q_1 e Q_2 dello stesso segno, la cui somma è pari ad un valore noto Q. Le sfere sono poste ad una distanza tra i loro centri pari a d, con $d \gg R$; sia F il modulo della forza con cui si respingono. Successivamente le sferette vengono allontanate ad una distanza $d' = 3d$ e vengono collegate mediante un filo conduttore; una volta rimosso il filo, la forza di repulsione tra le sfere si riduce a $F' = \dfrac{F}{8}$. Si determinino:
1) il valore delle cariche Q_1' e Q_2' presenti sulle due sferette dopo il collegamento in funzione di Q;
2) il valore delle cariche Q_1 e Q_2 presenti inizialmente sulle due sfere, sempre in funzione di Q.
Si trascurino effetti di induzione elettrostatica.

Fondamenti di Fisica Sperimentale

Seconda prova *in itinere* - 28/06/2016 - **Soluzioni**

Esercizio 1

Si veda ad esempio S. Focardi, I. Massa, A. Uguzzoni, M. Villa, *Fisica Generale, Meccanica e Termodinamica* II edizione, cap. 14, pag. 597 e seguenti oppure P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, *Elementi di Fisica, Meccanica - Termodinamica* II edizione, cap. 14, pag. 376 e seguenti.

Esercizio 2

a) Data la simmetria sferica del sistema, applicheremo il teorema di Gauss al campo elettrico ipotizzando che possa scriversi nella forma $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$, con $\mathbf{u}_r$ versore radiale. Scelta una superficie gaussiana Σ sferica e concentrica al sistema, di raggio variabile r, risulterà che $\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E(r) = Q_{int,\Sigma}/\varepsilon_0$, da cui

$$E(r) = \frac{Q_{int,\Sigma}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1}$$

Tenuto conto degli effetti di induzione elettrostatica sul guscio conduttore, si distinguono i seguenti casi:

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq R_1, & Q_{int,\Sigma} = \frac{4}{3}\pi\rho r^3, \quad E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \\ R_1 \leq r < R_2, & Q_{int,\Sigma} = \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3, \quad E(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} \\ R_2 < r < R_3, & Q_{int,\Sigma} = 0, \quad E(r) = 0 \\ r > R_3, & Q_{int,\Sigma} = \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3, \quad E(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} \end{cases} \tag{2}$$

b) Poiché il guscio conduttore è equipotenziale i potenziali in $r = R_2$ ed $r = R_3$ sono uguali. E' facile dimostrare che ponendo il potenziale all'infinito pari a zero, il potenziale nella regione $r > R_3$ è dato dalla espressione $V(r) = \frac{Q_{int,\Sigma}}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r}$, per cui avremo:

$$V_2 = V(R_3) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_3} \tag{3}$$

c) Infine si noti che ponendo il guscio a terra le cariche indotte sulla superficie esterna abbandoneranno il conduttore. Pertanto, non essendoci cariche esterne, il campo nella regione $r > R_3$ sarà nullo. Il campo nelle altre regioni dello spazio manterrà invece la stessa espressione calcolata precedentemente.

Esercizio 3

a) Data la simmetria cilindrica del sistema, applicheremo la legge di Ampere al campo magnetico ipotizzando che possa scriversi nella forma $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_t$, con $\mathbf{u}_t$ versore tangente alle circonferenze concentriche al sistema e diretto nel verso individuato dalla regola della vite destrorsa che avanzi nel verso di scorrimento della corrente. Scelta una linea γ circolare e concentrica al sistema, di raggio variabile r, risulterà che $\oint_\gamma \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{conc,\gamma}$, da cui

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_{conc,\gamma}}{2\pi r} \tag{4}$$

Detta $J = \dfrac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$ la densità di corrente che scorre nel cilindro cavo, si distinguono quindi i seguenti casi:

$$\begin{cases} 0 \le r \le R_1, & I_{conc,\gamma} = 0, & B(r) = 0 \\ R_1 \le r \le R_2, & I_{conc,\gamma} = J\pi(r^2 - R_1^2), & B(r) = \dfrac{\mu_0 J(r^2 - R_1^2)}{2r} = \dfrac{\mu_0 I(r^2 - R_1^2)}{2\pi r(R_2^2 - R_1^2)} \\ r \ge R_2, & I_{conc,\gamma} = J\pi(R_2^2 - R_1^2), & B(r) = \dfrac{\mu_0 J(R_2^2 - R_1^2)}{2r} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases} \tag{5}$$

b) Notiamo che le forze agenti sui lati perpendicolari all'asse del cilindro sono uguali in modulo e direzione ma opposte in verso, per cui non concorrono alla risultante delle forze. Ricordiamo inoltre che la forza magnetica agente su un filo percorso da corrente è pari a $\mathbf{F} = \int_{filo} I\mathbf{dl} \times \mathbf{B}$ che nel caso di un filo rettilineo di lunghezza l immerso in un campo uniforme diviene $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, con $\mathbf{l}$ vettore diretto lungo il filo nel verso di scorrimento della corrente. Detto $\mathbf{u}_r$ il versore radiale diretto verso l'esterno del cilindro, avremo quindi che la risultante delle forze, legata ai soli lati della spira paralleli al cilindro, sarà pari a:

$$\mathbf{R} = \left[\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi(d+L)}\right]\mathbf{u}_r = \frac{\mu_0 I^2 L \mathbf{u}_r}{2\pi}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right] = \frac{\mu_0 I^2 L^2 \mathbf{u}_r}{2\pi d(d+L)} \tag{6}$$

e risulterà repulsiva.

Esercizio 4

1) Nel momento in cui le sferette vengono collegate esse assumono medesimo potenziale $V_1 = V_2 = V$; trattandosi di sferette identiche esse avranno anche medesima capacità, pari a $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. Pertanto, dette Q_1' e Q_2' le nuove cariche presenti sulle sfere, dovremo avere che:

$$V_1 = \frac{Q_1'}{C} = V_2 = \frac{Q_2'}{C} \tag{7}$$

da cui si evince che le due cariche sono uguali. Per il principio di conservazione della carica dovrà anche risultare che $Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 = Q$, da cui risulterà che $Q_1' = Q_2' = \dfrac{Q}{2}$.

2) Avremo che:

$$\begin{cases} F = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \dfrac{Q_1(Q - Q_1)}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \\ F' = \dfrac{F}{8} = \dfrac{Q_1' Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 d'^2} = \dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 (3d)^2} \end{cases} \tag{8}$$

da cui

$$\frac{1}{8}\frac{Q_1(Q - Q_1)}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{Q^2}{144\pi\varepsilon_0 d^2} \tag{9}$$

ovvero

$$Q_1(Q - Q_1) = \frac{2Q^2}{9} \tag{10}$$

che può essere riscritta come $Q_1^2 - QQ_1 + 2Q^2/9 = 0$.
Le soluzioni di questa equazione di secondo grado sono allora $Q_{1a} = Q/3$ e $Q_{1b} = 2Q/3$; si noti che scegliendo una delle due soluzioni come valore di Q_1, l'altra è automaticamente pari al valore corrispondente di Q_2.