Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	T.	Totale

Analisi e Geometria 1	**Docente: Gianluca Mola**	**27/1/2009** **Ing. Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matr.**

Nello spazio sottostante gli esercizi devono essere riportati sia i risultati che i calcoli. Punteggi: Es.1=6 punti, Es.2=8 punti, Es.3=8 punti, Es.4=8 punti. Punteggio minimo per superare la prova=18 punti.

1. Dire per quali valori del parametro reale a l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{(e^x - 1 - x)(1-x)^{2/3}}{\sqrt{x}\,(\sin x)^a}\,dx$$

è convergente.

Soluzione.

La funzione $f(x)$ che compare sotto il segno di integrale non è definita solo in $x = 0$. In un intorno destro di questo punto si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{a-3/2}}\,.$$

Pertanto, l'integrale I è convergente per $a - 3/2 < 1$, ossia $a < 5/2$.

2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0 \\ y(\sqrt{3}) = \sqrt{8}, \end{cases}$$

(a) mostrare che esso ammette esattamente una soluzione;

(b) determinare tale soluzione.

Soluzione.

(a) L'equazione differenziale data è del primo ordine a variabili separabili e in forma normale diventa

$$y' = a(x)b(y) = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\,.$$

Poiché la funzione $a(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e la funzione $b(y)$ è di classe $\mathcal{C}'$ su tutto $\mathbb{R}\setminus 0$, il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione in un introno delle condizioni iniziali date.

(b) Separando le variabili si ha

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,.$$

Quindi, integrando, si ottiene $\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2}+c$, dove c è una costante reale arbitraria. Imponendo la condizione iniziale $y(\sqrt{3}) = \sqrt{8}$, si ottiene $c = 5$ e quindi

$$y = \pm\sqrt{(5-\sqrt{1+x^2})^2-1} = \pm\sqrt{25+x^2-10\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Infine, poichè $y(\sqrt{3}) > 0$, la soluzione cercata è $y = \sqrt{25+x^2-10\sqrt{1+x^2}}\,.$

3. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, si considerino il punto $P = (1, 0, 2)$, e il piano Π_α di equazione

$$x - \alpha y + z + 2 = 0,$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Scrivere l'equazione della retta r_α passante per P e ortogonale a Π_α;

(b) calcolare le coordinate di Q_α, punto di intersezione tra Π_α e r_α;

(c) calcolare per quali α la distanza tra P e Q_α risulta massima.

Soluzione.

(a) Poichè il vettore ortogonale a Π_α risulta essere $[1, -\alpha, 1]^T$, una possibile equazione parametrica di r_α è

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = -\alpha t, \\ z = t + 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Sostituendo le espressioni della rappresentazione parametrica calcolata al punto precedente nell'equazione di Π_α, otteniamo

$$t + 1 - \alpha(-\alpha t) + t + 2 + 2 = 0,$$

da cui si ricava facilmente $t = -\frac{5}{\alpha^2+2}$. Di conseguenza, il punto cercato ha coordinate

$$Q_\alpha = \left(-\frac{5}{\alpha^2 + 2} + 1, \frac{5\alpha}{\alpha^2 + 2}, -\frac{5}{\alpha^2 + 2} + 2 \right).$$

(c) Calcoliamo la distanza tra P e Q_α, usando la definizione:

$$\begin{aligned} d(Q_\alpha, P) &= \sqrt{\left(-\frac{5}{\alpha^2 + 2} + 1 - 1 \right)^2 + \left(\frac{5\alpha}{\alpha^2 + 2} \right)^2 + \left(-\frac{5}{\alpha^2 + 2} + 2 - 2 \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{\alpha^2 + 2} \right)^2 (\alpha^2 + 2)} = \frac{5}{\alpha^2 + 2} \sqrt{\alpha^2 + 2} = \frac{5}{\sqrt{\alpha^2 + 2}}. \end{aligned}$$

Ovviamente tale espressione risulta massimizzata per il valore $\alpha = 0$.

4. Calcolare la massa totale e le coordinate del baricentro dell'elica cilindrica di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h\,\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ (r, h \geq 0) \end{array}$$

munita della densità di massa $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$.

Soluzione.

La massa totale di γ è

$$M = \int_\gamma \rho\, ds = \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)\sqrt{r^2+h^2}\, d\theta = 2\pi\,\sqrt{r^2+h^2}$$

e le coordinate del baricentro sono

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\int_\gamma \rho\, x\, ds = \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta) r\cos\theta\sqrt{r^2+h^2}\, d\theta = \frac{r}{2}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M}\int_\gamma \rho\, y\, ds = \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta) r\sin\theta\sqrt{r^2+h^2}\, d\theta = 0$$

$$\overline{z} = \frac{1}{M}\int_\gamma \rho\, z\, ds = \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta) h\theta\sqrt{r^2+h^2}\, d\theta = h\pi\,.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	T.	Totale

Analisi e Geometria 1	**Docente: Gianluca Mola**	**27/1/2009** **Ing. Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matr.**

Nello spazio sottostante gli esercizi devono essere riportati sia i risultati che i calcoli.
Punteggi: Es.1=6 punti, Es.2=8 punti, Es.3=8 punti, Es.4=8 punti. Punteggio minimo per superare la prova=18 punti.

1. Dire per quali valori del parametro reale a l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{(1 + x - e^x)\sqrt{x}}{(1 + x)^{2/3}\,(\sin x)^a}\,dx$$

è convergente.

Soluzione.

L'integrale I è convergente per $a < 7/2$.

2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\sqrt{1+y^2} - yy'\sqrt{1+x^2} = 0 \\ y(\sqrt{8}) = -\sqrt{3}, \end{cases}$$

(a) mostrare che esso ammette esattamente una soluzione;

(b) determinare tale soluzione.

Soluzione.

$$y = -\sqrt{(\sqrt{1+x^2}-1)^2 - 1} = -\sqrt{1+x^2+2\sqrt{1+x^2}}\,.$$

3. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, si considerino il punto $P = (2, 0, 1)$, e il piano Π_α di equazione
$$x + \alpha y + z + 2 = 0,$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Scrivere l'equazione della retta r_α passante per P e ortogonale a Π_α;

(b) calcolare le coordinate di Q_α, punto di intersezione tra Π_α e r_α;

(c) calcolare per quali α la distanza tra P e Q_α risulta massima.

Soluzione.

(a) Equazione parametrica di r_α
$$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = \alpha t, \\ z = t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Coordinate di Q_α
$$Q_\alpha = \left(-\frac{5}{\alpha^2 + 2} + 2, -\frac{5\alpha}{\alpha^2 + 2}, -\frac{5}{\alpha^2 + 2} + 1 \right).$$

(c) Distanza tra P e Q_α
$$d(Q_\alpha, P) = \frac{5}{\sqrt{\alpha^2 + 2}},$$
massimizzata per il valore $\alpha = 0$.

4. Calcolare la massa totale e le coordinate del baricentro dell'elica cilindrica di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h\,\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ (r, h \geq 0) \end{array}$$

munita della densità di massa $\rho(\theta) = 1 - \cos\theta$.

Soluzione.

$M = 2\pi\,\sqrt{r^2 + h^2}\,,\ \ \overline{x} = -r/2\,,\ \ \overline{y} = 0\,,\ \ \overline{z} = h\pi\,.$